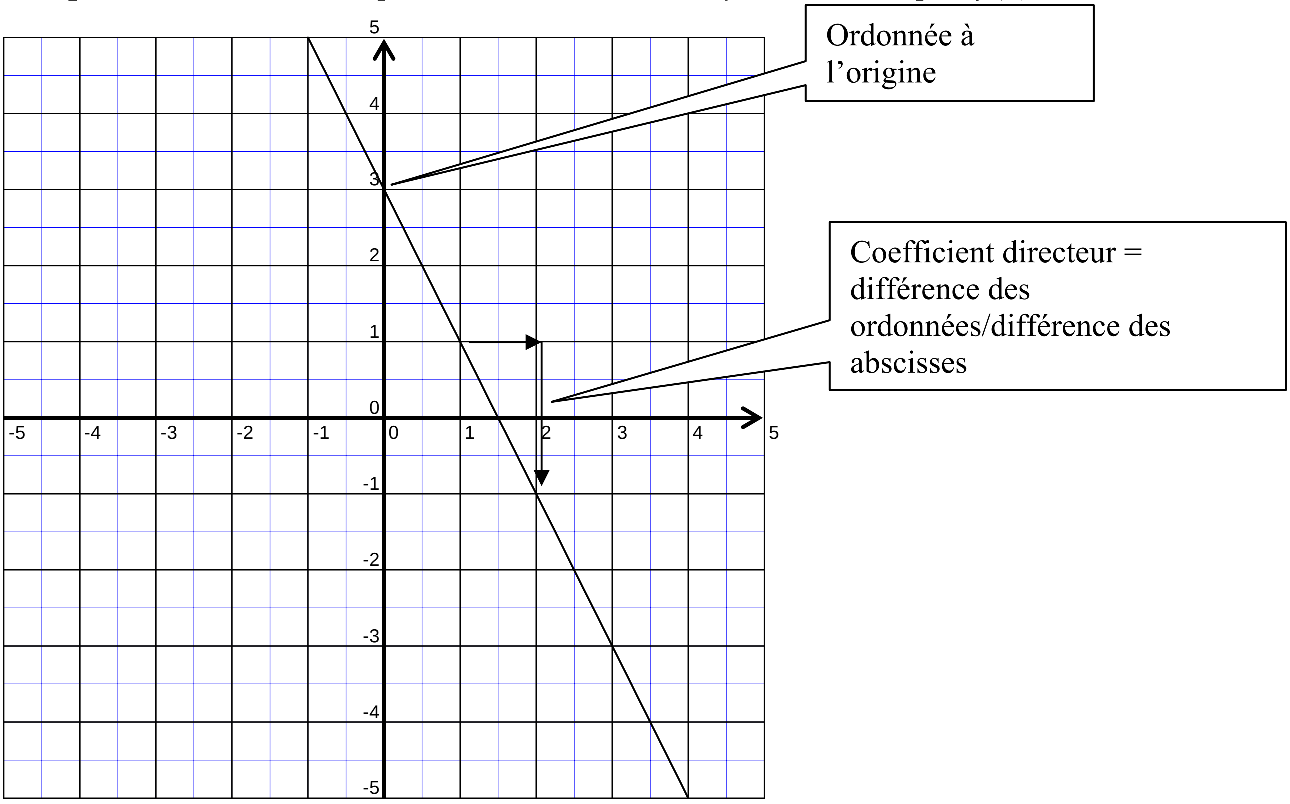
Fonctions affines ; Equations et inéquations

I. Fonctions affines.

1. Définition

Définition d'une **fonction affine :** on appelle fonction affine toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ où a et b sont des réels tels que $a \neq 0$.
La courbe représentative d'une fonction affine est une droite.

Exemple : Tracer la courbe représentative de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 3$.



2. Sens de variation

f est croissante si $a > 0$ et décroissante si $a < 0$.

<u>Démonstration :</u>
Soit *u* et *v* dans $\mathbb{R}$ tel que $\boxed{u \leq v}$
1er cas : *a*>0
Multiplier par *a* (>0) ne change pas le sens des inégalités donc $au \leq av$
Ajouter un nombre *b* ne change pas le sens des inégalités donc $\boxed{au + b \leq av + b}$
Les nombres et leurs images sont rangés dans le même ordre
donc la fonction *f* est croissante sur $\mathbb{R}$

$2^{\text{ème}}$ cas : $a<0$
Multiplier par a (<0) change le sens des inégalités donc $au \geq av$
Ajouter un nombre b ne change pas le sens des inégalités donc $\boxed{au+b \geq av+b}$
Les nombres et leurs images sont rangés dans l'ordre contraire
donc la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$

Exemples :
► La fonction affine $x \to 3x-7$ est croissante sur $\mathbb{R}$
► La fonction affine $x \to -2x+15$ est décroissante sur $\mathbb{R}$

3. Caractérisation

Théorème : f est la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax+b$.
Lorsque x varie d'un nombre h, alors $f(x)$ varie de ah.
On traduit ainsi : L'accroissement de la fonction f est proportionnel à l'accroissement de la variable, le coefficient de proportionnalité étant a.

Illustration :
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x-8$

+2 +2

x	-1	1	3
$f(x)$	-12	-4	4

+4*2 +4*2

Démonstration :
Pour tous réels x et h, $f(x+h) = a(x+h)+b = ax+ah+b = (ax+b)+ah = f(x)+ah$.
On a :
$$f(x+h)-f(x) = ah$$
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a$$

Exercices :

1. Déterminer la fonction affine f telle que $f(-1)=8$ et $f(3)=0$

+4

x	-1	3
$f(x)$	8	0

-8

-8 = $4a \Rightarrow a = \frac{-8}{4} = -2$
Donc $f(x) = -2x+b$
$f(3) = 0 \Rightarrow -2\times 3+b = 0 \Rightarrow b = 6$
$f(x) = -2x+6$

2. f est une fonction affine telle que $f(-2)=-4$ et $f(4)=-1$. Calculer $f(6)$.

+6 +2

x	-2	4	6
$f(x)$	-4	-1	

+3 $+2\times\left(\frac{1}{2}\right)=1$ d'où $\boxed{f(6)=0}$

Donc $a=\frac{1}{2}$

3. Une droite passe par les points $A(-1\,;3)$ et $B(4\,;5)$. Déterminer son équation.

$$\boxed{a=\text{coefficient directeur}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}}$$

Ici, $a=\frac{5-3}{4+1}=\frac{2}{5}$

L'équation est de la forme $y=\frac{2}{5}x+b$.

A est sur la droite donc ses coordonnées vérifient l'équation.

$3=\frac{2}{5}\times(-1)+b\Rightarrow b=3+\frac{2}{5}=\frac{17}{5}$

(AB) : $y=\frac{2}{5}x+\frac{17}{5}$

$\boxed{b=\text{ordonnée à l'origine}}$

Théorème réciproque : Si les accroissements d'une fonction *f* sont proportionnels aux accroissements de la variable avec pour coefficient de proportionnalité *a*, alors *f* est une fonction affine $x\to ax+b$ où *b* réel.

Exercice : Démontrer que la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+1$ n'est pas affine.

x	-1	0	1
$f(x)$	2	1	2

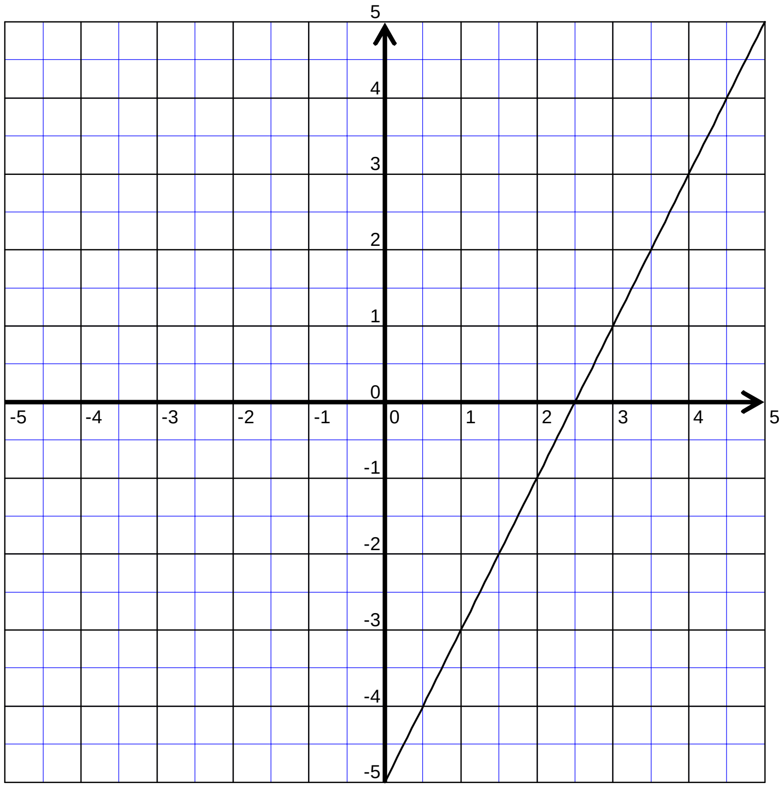
L'accroissement des images n'est pas proportionnel à l'accroissement de la variable donc *f* n'est pas affine.

4. Signe

Déterminer le signe d'une fonction, c'est déterminer la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses.

Exemples :

1er cas : f est la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 5$.



f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Sur $]-\infty ; 2,5]$, $f(x) \leq 0$

Sur $[2,5 ; +\infty[$, $f(x) \geq 0$

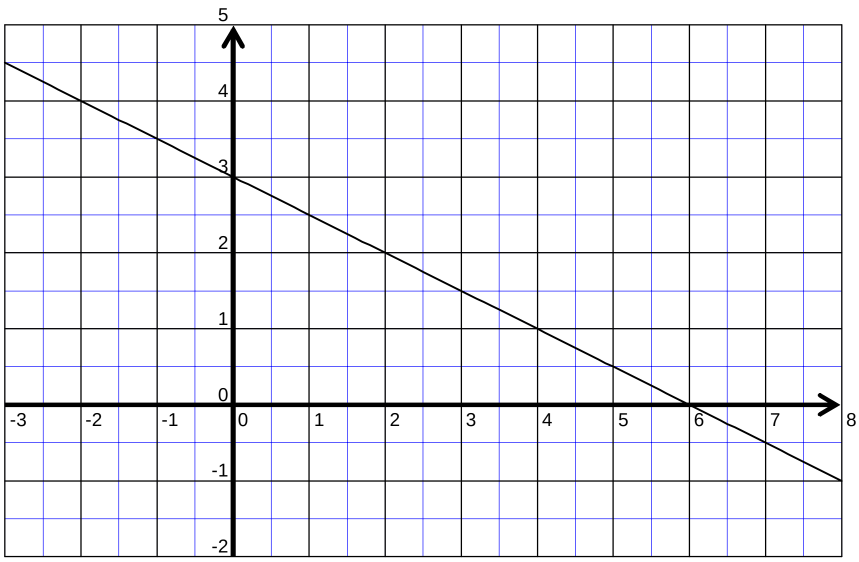
Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
2x-5	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Tableau de signe de f :

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
2x-5		$-$	0	$+$	

2ème cas : f est la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 3$



f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Sur $]-\infty ; 6]$, $f(x) \geq 0$

Sur $[6 ; +\infty[$, $f(x) \leq 0$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
-0,5x+3	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Tableau de signe de f :

x	$-\infty$		6		$+\infty$
-0,5x+3		$+$	0	$-$	

Signe de $ax+b$:

$ax+b=0$ si $x=-\dfrac{b}{a}$

Si a>0

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
ax+b		$-$	0	+	

Si a<0, les signes sont inversés.

On dit que l'on met le signe de « *a* » à droite du zéro.

II. Equations et inéquations.

On sait désormais résoudre une équation et déterminer le signe d'une expression du 1^{er} degré (fonction affine).

1. Equations

Une équation est une égalité où figure un nombre inconnu.
Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre inconnu telles que l'égalité soit vraie : ces valeurs sont les solutions de l'équation.

a. Equation du 1^{er} degré

$$ax+b=0 \Leftrightarrow ax=-b \Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}$$

b. Equations se ramenant au 1^{er} degré

Règle du produit NUL : Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

$$A\times B=0 \Leftrightarrow A=0 \text{ ou } B=0$$

Exemples :

1. **Résoudre** $-x^2+6x=0$
   L'équation n'étant pas du premier degré, on reconnaît une somme et on essaie de l'écrire sous forme d'un produit de facteurs.
   $-x^2+6x = -x\times x \quad + \quad 6\times x$
   $\qquad\qquad = x(-x+6)$
   Donc $-x^2+6x=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $-x+6=0$
   $-x+6=0 \Leftrightarrow -x=-6 \Leftrightarrow x=6$

   $\boxed{S=\{0\,;6\}}$

2. Résoudre $x(1-5x)=1-5x$

Si on développe on obtient une expression de degré 2. On se ramène à « zéro », on reconnaît une somme et on essaie de l'écrire sous forme de produit de facteurs.

$$\begin{aligned} x(1-5x)=1-5x &\Leftrightarrow x(1-5x)-(1-5x)=0 \\ &\Leftrightarrow (1-5x)(x-1)=0 \\ &\Leftrightarrow 1-5x=0 \text{ ou } x-1=0 \end{aligned}$$

$$1-5x=0 \Leftrightarrow -5x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{-1}{-5}=\frac{1}{5}$$

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$\boxed{S=\left\{\frac{1}{5};1\right\}}$$

Rappel sur les égalités remarquables

Forme développée	Forme factorisée
$a^2+2ab+b^2$	$(a+b)^2$
$a^2-2ab+b^2$	$(a-b)^2$
a^2-b^2	$(a+b)(a-b)$

3. Résoudre $x^2-4=3(x+2)$

On a une expression de degré 2. On se ramène à « zéro », on reconnaît une somme et on essaie de l'écrire sous forme de produit de facteurs.

$$\begin{aligned} x^2-4=3(x+2) &\Leftrightarrow x^2-4-3(x+2)=0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x+2)-3(x+2)=0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)(x-2-3)=0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)(x-5)=0 \end{aligned}$$

$$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$$

$$x-5=0 \Leftrightarrow x=5$$

$$\boxed{S=\{-2;5\}}$$

Règle du quotient nul : Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur non nul.

$$\frac{A}{B}=0 \Leftrightarrow A=0 \text{ et } B\neq 0$$

Exemple : Résoudre $\dfrac{7-x}{x+4}=0$

$$7-x=0 \Leftrightarrow x=7$$

$$x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$$

$7\neq -4$ donc $\boxed{S=\{7\}}$

c. Résolution graphique

2. Inéquations