

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

I. Notion de fonction.

1. Fonction d'une variable.

a. Définition.

Définition d'**une fonction** : Soit I un intervalle ou une réunion d'intervalles. Définir une fonction f sur I , c'est associer à chaque réel x de I un réel et **UN SEUL**, appelé image de x .
On note $f: x \rightarrow f(x)$, $f(x)$ est l'image de x par la fonction f .

Exemples

i. Soit $f: x \rightarrow \frac{1}{x}$. Quel(s) réel(s) associe-t-on respectivement à -1 , -2 , $\frac{3}{2}$, 0 ?

A -1 , on associe -1 . A -2 , on associe $-\frac{1}{2}$. A $\frac{3}{2}$, on associe $\frac{2}{3}$.

Le nombre $\frac{1}{0}$ n'existe pas.

Pour tout réel différent de 0 , on associe un et un seul réel.

On dit que f est une fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

ii. A chaque réel x , on associe le réel y tel que $y^2 = x^2 + 1$.

Quel(s) réel(s) associe-t-on respectivement à 0 , -1 ?

Si $x=0$, $y^2 = 1$. Cette équation a deux solutions 1 et -1 . Donc à 0 , on associe 1 et -1 .

Si $x=-1$, $y^2 = 2$. Cette équation a deux solutions $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

f n'est pas une fonction puisque à tout réel elle associe deux nombres.

Définition de l'**ensemble de définition d'une fonction** : On appelle ensemble de définition de la fonction f , noté D ou D_f , l'ensemble des réels x qui admettent une image par f .

Exemples :

i. la fonction $f: x \rightarrow \frac{1}{x}$ est définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

ii. Soit f définie par $f(x) = \sqrt{x}$. L'ensemble de définition de f est $[0; +\infty[$.

b. Calculs d'images et antécédents.

Vocabulaire :

- x est appelée la **variable** : x varie en prenant toutes les valeurs possibles dans l'ensemble de définition.
- $f(x)$ est l'**image** de x par f .
- x est l'**antécédent** de $f(x)$ par f .

Exercice : Soit f définie sur $[-3; 2]$ par $f(x) = x^2$.

1. Cherchez les images par f de -3 ; 0 ; 1 ; -2 ; 3 ; 2 ; -1 ; $-\frac{10}{3}$.
2. Cherchez le ou les antécédents par f de 4 ; -1 ; 0 et 9 .

Correction :

1.

- $-3 \in Df$ et $f(-3) = (-3)^2 = 9$; $0 \in Df$ et $f(0) = 0^2 = 0$; $1 \in Df$ et $f(1) = 1^2 = 1$;
- $-2 \in Df$ et $f(-2) = (-2)^2 = 4$; $3 \notin Df$ et $f(3)$ n'existe pas ; $2 \in Df$ et $f(2) = 2^2 = 4$;
- $-1 \in Df$ et $f(-1) = (-1)^2 = 1$; $-\frac{10}{3} \notin Df$ et $f(-\frac{10}{3})$ n'existe pas.

2. Cherchez les antécédents de 4 , c'est chercher les réels x tels que $f(x) = 4$; on résout ici l'équation $x^2 = 4$.

Cette équation a deux solutions 2 et -2 . On a bien 2 et -2 dans D_f . Donc 4 a deux antécédents par la fonction f qui sont 2 et -2 .

Antécédents de -1 : l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solutions car un carré donne toujours un résultat positif. Donc -1 n'a pas d'antécédents par la fonction f .

Antécédents de 0 : l'équation $x^2 = 0$ a une unique solution 0 . on a bien 0 dans D_f donc 0 a un unique antécédent par f qui est 0 .

Antécédents de 9 : l'équation $x^2 = 9$ a deux solutions 3 et -3 . On a -3 dans D_f mais pas 3 . Donc 9 a un unique antécédent par f qui est -3 .

Constat de l'exercice :

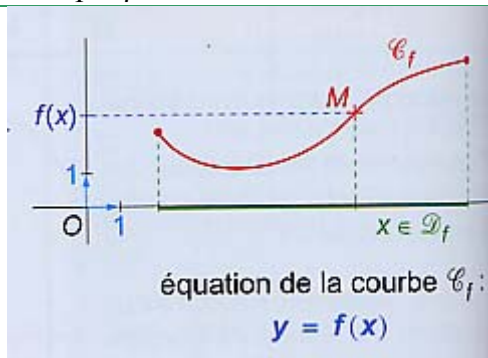
- Par une fonction f , un réel x a au plus une image (si $x \in D_f$, x a une image $f(x)$; si $x \notin D_f$, x n'a pas d'image).
- Par une fonction f , un réel y peut avoir de 0 à plusieurs antécédents.

2. Courbe représentative d'une fonction.

a. Définition.

Définition de la **courbe représentative d'une fonction** : Dans un repère donné, la courbe représentative d'une fonction f est l'ensemble des points M de coordonnées $(x ; y)$ telles que :

- l'abscisse x prend toutes les valeurs de l'ensemble de définition de f .
- l'ordonnée y est l'image de x par f .



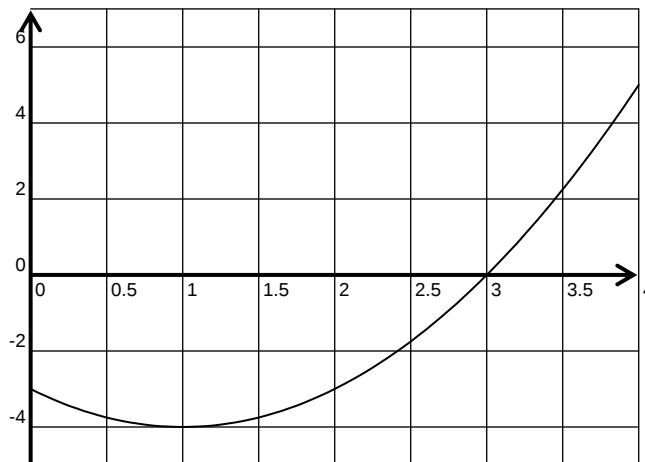
Définition du **tableau de valeurs d'une fonction** : Pour tracer la courbe (C) de la fonction f , il faut calculer les images de plusieurs réels x de l'ensemble de définition D_f (pas seulement les images des entiers !). On regroupe les résultats dans un tableau dit tableau de valeurs.

Exemples :

- i. Tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0 ; 4]$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Tableau de valeurs

x	0	1	2	3	4	0,5	1,5
$f(x)$	-3	-4	-3	0	5	-3,75	-3,75



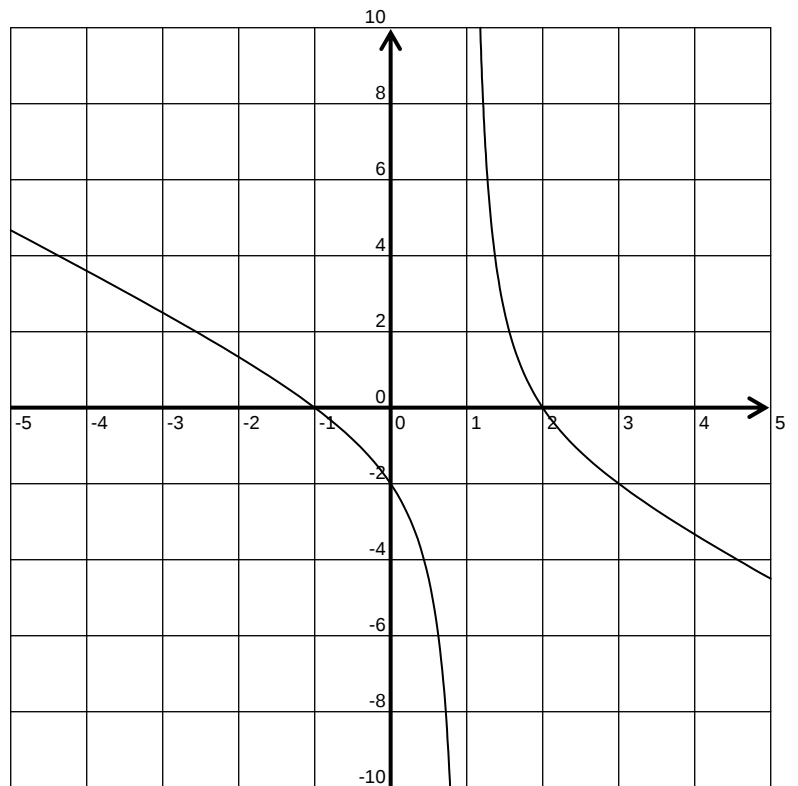
ii. Tracez la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-5; 1[\cup]1; 5]$ par

$$f(x) = -x + \frac{4}{2x-2}.$$

Tableau de valeurs :

x	-5	-4	-3	-2
$f(x)$	4.6	3.6	2.5	1.3

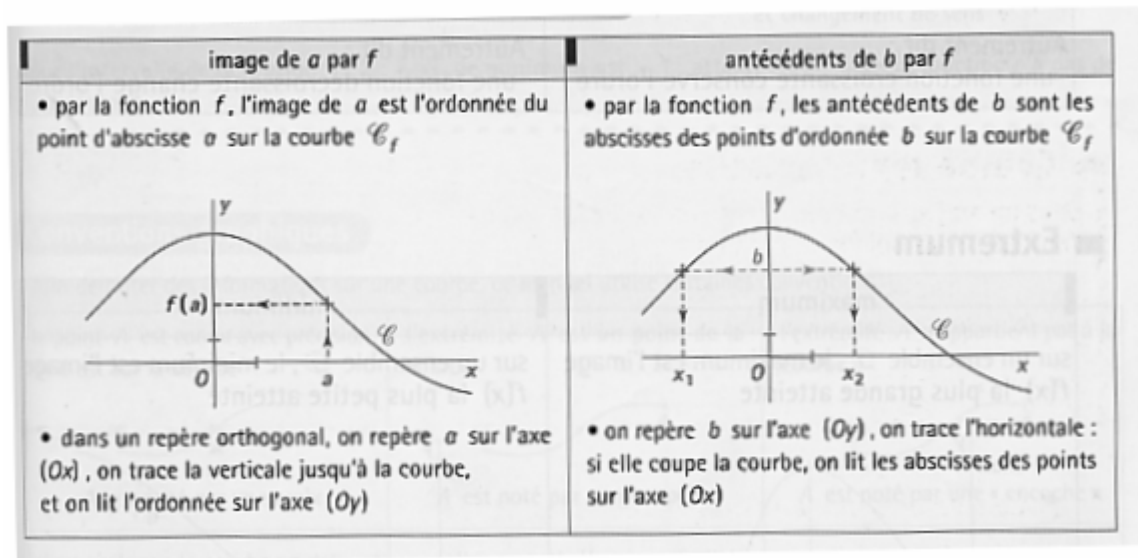
-1	0	2	3	4	5
0	-2	0	-2	-3.3	-4.5



La valeur interdite donne une cassure dans la courbe soit deux morceaux de courbe.

b. Lectures d'images et antécédents.

Soit f une fonction définie sur l'intervalle I et C_f sa courbe représentative.



c. Construction d'une courbe à l'aide de la calculatrice.

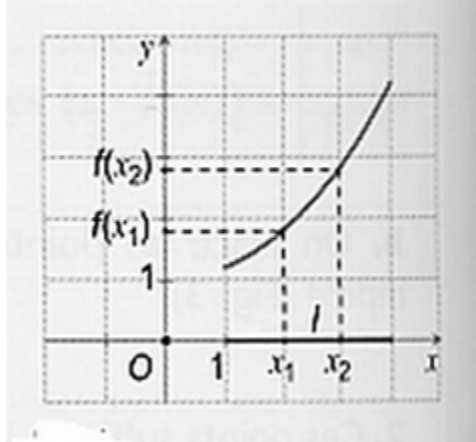
II. Sens de variation d'une fonction.

1. Fonction croissante, décroissante sur un intervalle.

On considère f une fonction définie sur l'intervalle I .

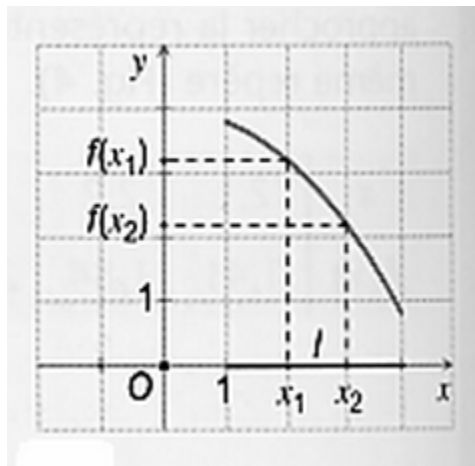
a. Croissance

Définition d'une **fonction croissante** : f est **croissante** sur I si et seulement si, pour tous x_1 et x_2 réels de I , $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont rangés dans le même ordre que x_1 et x_2 .



b. Décroissance

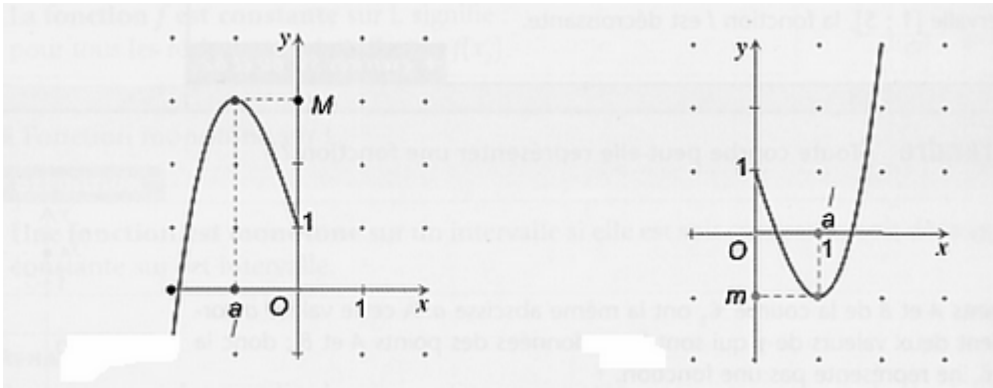
Définition d'une **fonction décroissante** : f est **décroissante** sur I si et seulement si, pour tous x_1 et x_2 réels de I , $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont rangés dans l'ordre contraire de x_1 et x_2 .



2. Minimum, maximum d'une fonction.

Définition du **maximum** : M est le maximum de f sur I atteint en a si, pour tout x de I , $f(x) \leq M$ et $f(a) = M$.

Définition du **minimum** : m est le minimum de f sur I atteint en a si, pour tout x de I , $f(x) \geq m$ et $f(a) = m$.



Un maximum (ou un minimum) est unique mais il peut être atteint en plusieurs valeurs de x .

Exercice :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 6x - 1$.

1. A l'aide de la calculatrice, précisez l'existence d'un minimum m pour f .
2. Calculez $f(x) - m$. En déduire le résultat.

3. Tableau de variation.

Pour résumer l'étude des variations d'une fonction, on dresse un tableau de variations de f . Pour cela, on décompose l'ensemble de définition en intervalles sur lesquels la fonction f est soit croissante, soit décroissante, soit constante.

Exercice :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 0.01x$.

A l'aide de la calculatrice, dressez le tableau de variation de f .