TRIANGLES ISOMETRIQUES

I. Définitions.

Définition : Deux triangles *ABC* et *A'B'C'* sont dits isométriques si leurs côtés et leurs angles sont égaux deux à deux (*AB = A'B'* ; *AC = A'C'* ; *BC = B'C'* ; $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$; $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$; $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$).

Théorème : Deux triangles sont isométriques si et seulement si ils sont images l'un de l'autre par une succession de transformations (symétrie axiale ; symétrie centrale ; translation ; rotation).

Démonstration
Hypothèses : *ABC* est un triangle.
A'B'C' est son image par une suite de transformations.
Argument : Les symétries centrales, axiales, translations et rotations conservent les distances.
Donc *A'B'C'* et *ABC* sont isométriques.

Réciproque : *ABC* et *A'B'C'* sont isométriques.
Etape 1 : Soit Δ_1 la médiatrice de [*AA'*].
Soit s_1 la symétrie d'axe Δ_1.
s_1 transforme *A* en *A'*.
Si $s_1(B) = B'$ et $s_1(C) = C'$, c'est terminé.

Sinon
s_1 a transformé *A* en *A'* ;
B en B_1 ; *C* en C_1.
Le triangle ABC a été transformé par s_1 en le triangle isométrique $A'B_1C_1$.
Les triangles *ABC* et *A'B'C'* sont isométriques donc : $AB = A'B_1 = A'B'$.
A' est équidistant de *B'* et B_1.

Etape 2 : Soit Δ_2 la médiatrice de [B_1B'].
Soit s_2 la symétrie d'axe Δ_2.
s_2 transforme B_1 en *B'*.
A' appartient à Δ_2 donc s_2 transforme *A'* en *A'*.
Si $s_2(C_1) = C'$ alors c'est terminé.

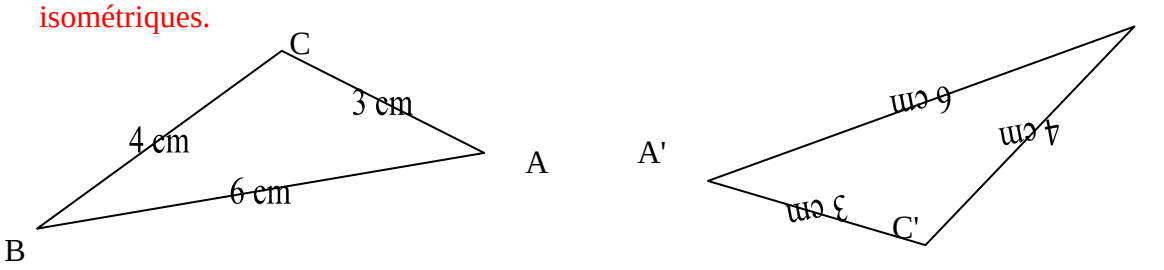
Sinon
s_2 a transformé B_1 en *B'* ; *A'* en *A'* et C_1 en C_2.

Le triangle $A'B_1C_1$ a été transformé en le triangle isométrique $A'B'C_2$.
On a $AC = A'C_1 = A'C_2 = A'C'$ donc *A'* est équidistant de C_2 et *C'*.
On a $BC = B_1C_1 = B'C_2 = B'C'$ donc *B'* est équidistant de C_2 et *C'*.

Etape 3 : Soit Δ_3 la médiatrice de $[C_2C']$.
Soit s_3 la symétrie d'axe Δ_3.
A' appartient à Δ_3 donc s_3 transforme *A'* en *A'*.
B' appartient à Δ_3 donc s_3 transforme *B'* en *B'*.
s_3 transforme C_2 en *C'*.
C'est terminé.

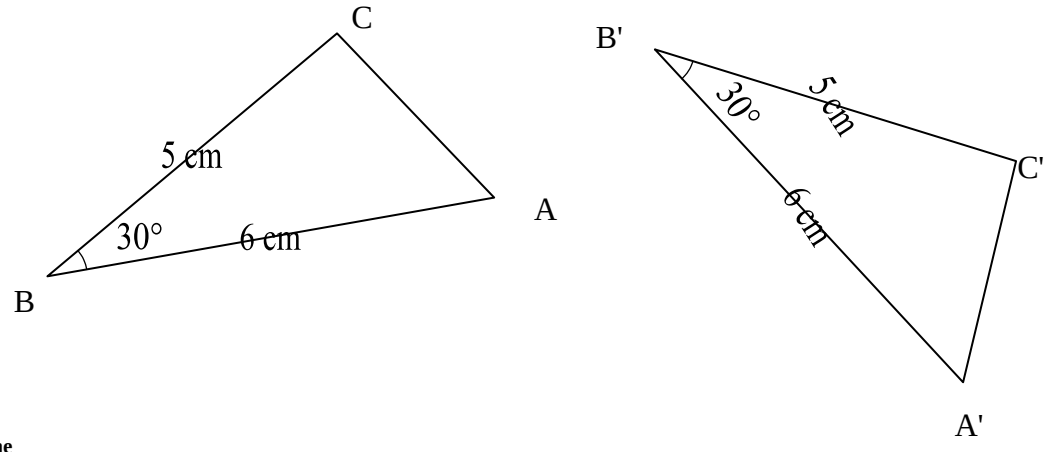
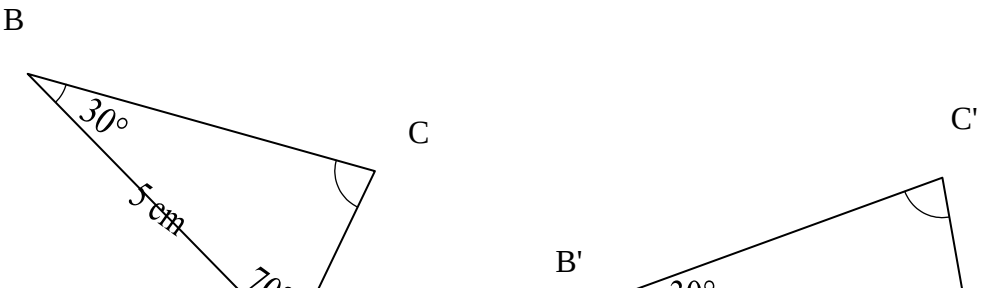
II. Caractérisation des triangles isométriques.
(ou conditions SUFFISANTES pour avoir des triangles isométriques)

1er cas :
Si deux triangles ont leurs trois côtés respectivement égaux, alors ces deux triangles sont isométriques.



Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement de même longueur, alors ces deux triangles sont isométriques.

2ème cas :



3ème cas :
Si deux triangles ont un côté égal, adjacent à deux angles respectivement égaux, alors ces deux triangles isométriques.