Probabilités ; variables aléatoires

Une expérience est dite aléatoire lorsque ses issues, ses résultats ne peuvent pas être prévues à l'avance et dépendent du hasard. La théorie des probabilités permet de quantifier le caractère aléatoire des événements possibles, c'est à dire les chances qu'ils ont de se réaliser.

I. Modélisation d'expériences aléatoires.

1. Evénements.

a. Univers

Lancer une pièce de monnaie et observer la face apparente qui retombe constitue une expérience aléatoire dont l'**univers** Ω comporte seulement deux issues possibles : $\Omega = \{\text{pile} ; \text{face}\}$

L'univers est constitué d'éléments de base qu'on appelle, indifféremment, issues, cas, éventualités, résultats ou **événements élémentaires**.

b. Evénement

Définition : Un **événement** E est un sous-ensemble d'issues de Ω.
On dit qu'une issue de Ω est favorable à E ou réalise E.

Au lancer d'un dé, $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
L'événement A : « Obtenir une face impaire » a trois issues favorables : $\{1 ; 3 ; 5\}$. L'issue $\{4\}$ n'est pas favorable à A.

Parmi les événements, on en distingue :
- l'événement certain, noté comme l'univers Ω : car toutes les issues possibles lui sont favorables.
- l'événement impossible, noté $\varnothing$, n'a aucune issue favorable et ne se réalise donc jamais.

2. Probabilité d'un événement.

La probabilité d'un événement mesure ses chances de se réaliser. Plus il y a de chances, plus la probabilité est grande.

Définition : Définir une **loi de probabilité** *P* sur un univers discret Ω composé des issues $\{w_1 ; w_2 ; ... ; w_n\}$, c'est associer à chaque issue w_i de Ω un nombre réel $P(w_i)$ de l'intervalle $[0 ; 1]$
vérifiant :

$$P : \Omega \to [0 ; 1]$$
$$\mathrm{w_i} \to P(w_i) \text{ tel que } P(w_1) + P(w_2) + ... + P(w_n) = 1$$

La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités de ses issues favorables.

Exemple : Soit A : « Obtenir une face impaire » dans un lancer de dé.
A= $\{1 ; 3 ; 5\}$

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

3. Situation d'équiprobabilité.

Définition : Quand toutes les issues ont les mêmes chances de se réaliser, ont dit qu'elles sont **équiprobables**. On dit que la loi définie sur Ω est une loi d'équiprobabilité.

Théorème : Dans un univers Ω comportant *n* issues équiprobables,

$$\boxed{\begin{array}{l} P(\text{une issue}) = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\text{nombre d'issues possibles dans } \Omega} \\ P(E) = \dfrac{p}{n} = \dfrac{\text{nombre d'issues favorables à E}}{\text{nombre d'issues possibles dans } \Omega} \end{array}}$$

Exemple : On choisit au hasard un fruit dans une caisse contenant 15 pommes et 5 poires.

$P(\text{choisir une poire}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

4. Calcul de probabilités.

a. Evénement contraire.

Définition : L'**<u>événement contraire</u>** (ou complémentaire) de E est l'événement dont les issues favorables sont les issues de Ω qui ne réalisent pas E.

On le note $\overline{\text{E}}$.

Théorème : La probabilité du contraire de A est $\boxed{P(\overline{\text{A}}) = 1 - P(\text{A})}$.

b. Intersection de deux événements.

Définition : L'**<u>intersection</u>** C des événements A et B est l'événement dont les issues favorables sont les issues qui sont favorables à la fois à A et B.

On écrit $\text{C} = \text{A} \cap \text{B}$ ou C = A **<u>et</u>** B.

On a $\text{A} \cap \text{B} = \text{B} \cap \text{A}$

Définition : Les événements A et B sont **<u>incompatibles</u>** (ou disjoints) si et seulement si leur intersection est impossible soit $\text{A} \cap \text{B} = \varnothing$.

c. Réunion d'événements.

Définition : L'union $\text{A} \cup \text{B}$ est l'événement dont les issues favorables sont les issues favorables à A ou à B ou à A et B. On note aussi l'union A **<u>ou</u>** B.

On a $\text{A} \cup \text{B} = \text{B} \cup \text{A}$.

Théorème : L'union des événements A et B a pour probabilité $\boxed{P(\text{A} \cup \text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(A \cap B)}$

Lorsque A et B sont incompatibles, $\boxed{P(\text{A} \cup \text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B})}$.

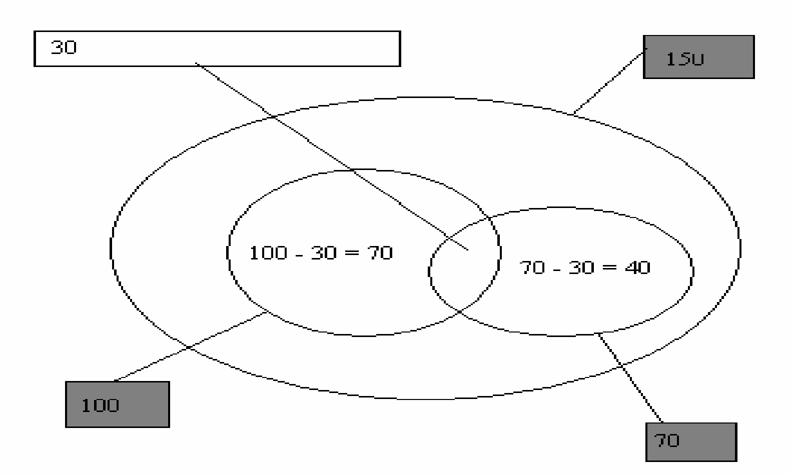
5. Exemple

Dans un club de vacances accueillant 150 touristes :

70 pratiquent le tennis, 100 pratiquent la plongée. 30 pratiquent les deux activités.

On choisit un touriste au hasard.

1. Quelle est la probabilité qu'il pratique tennis et plongée ?
2. Quelle est la probabilité qu'il pratique l'une ou l'autre des activités ?
3. Quelle est la probabilité qu'il ne pratique aucune activité ?



1. On choisit un touriste au hasard.

L'univers est l'ensemble des 100 touristes.

La loi de probabilité sur cet univers est une loi d'équiprobabilité.

$P_1 = \frac{30}{150} = \frac{1}{5}$

2. $P_2 = \frac{100}{150} + \frac{70}{150} - \frac{30}{150} = \frac{140}{150} = \frac{14}{15}$

3. $P_3 = 1 - P_2 = \frac{1}{15}$

II. Espérance et variance d'une loi de probabilités discrètes.

1. Variable aléatoire.

Exemple : On lance deux pièces de monnaie équilibrée.
A chaque sortie du « pile », on gagne 10 euros et à chaque sortie du « face », on perd 20 euros.
On s'intéresse à la loi de probabilité du gain G.

$\Omega = \{PP\,;PF\,;FP\,;FF\}$.
Sur Ω, la loi de probabilité est équirépartie.

Au résultat PP, G = 20 ; Aux résultats PF et FP, G = - 10 ; Au résultat FF, G = -40

Loi de probabilité de la variable aléatoire G :

Gain en €	+20	-10	-40
probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Remarque : $\sum \text{probabilités} = 1$

2. Espérance et variance d'une variable aléatoire.

Définition :
Soit X une variable aléatoire définie par sa loi de probabilité

Valeurs de X	x_1	x_2	$\cdots$	$\cdots$	x_m
$p(X = x_i)$	p_1	p_2			p_m

L'**espérance mathématique** de la variable aléatoire X est donnée par :

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_mx_m = \sum_{i=1}^{m} p_ix_i$$

La **variance** est également donnée par :

$$V(X) = (x_1 - E)^2 p_1 + (x_2 - E)^2 p_2 + \ldots + (x_m - E)^2 p_m = \sum_{i=1}^{m} (x_i - E)^2 p_i$$

Théorème : On a aussi $V(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i^{\,2} p_i - E^2$

Démonstration :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{m} (x_i - E)^2 p_i = \sum (x_i^{\,2} p_i - 2Ex_ip_i + E^2 p_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i^{\,2} p_i - 2E\underbrace{\sum_{i=1}^{m} x_ip_i}_{=E} + E^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{m} p_i}_{=1}$$

$$V(X) = \sum x_i^{\,2} p_i - 2E^2 + E^2$$

$$\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i^{\,2} p_i - E^2}$$

Reprise de l'exemple :
E(G)= $0{,}25\times 20+0{,}5\times(-10)+0{,}25\times(-40)=-10$
L'espérance mathématique du gain (le gain moyen) du joueur est une perte de 10 euros.
Le jeu n'est pas équitable.

V(G)= $0{,}25\times 20^2+0{,}5\times(-10)^2+0{,}25\times(-40)^2-(-10)^2=450$
Ecart type de $G\approx 21{,}2$

Exercice : Un jeu consiste à lancer un dé. Le joueur empoche une somme équivalente au nombre apparu si ce nombre est un multiple de 3 et paye le montant indiqué à la banque sinon.
Indiquer la loi de probabilité associée au gain, calculer l'espérance, la variance et l'écart type de ce gain.

Gain	-1	-2	3	-4	-5	6
Probabilité	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

E(gain) $=\dfrac{-1-2+3-4-5+6}{6}=-\dfrac{3}{6}$
L'espérance de gain du joueur est de -0,5 euros.

V(gain) $=\dfrac{1+4+9+16+25+36}{6}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{91}{6}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{182-3}{12}=\dfrac{179}{12}\approx 14{,}92$
Ecart type du gain $\approx 3{,}86$