Correction du devoir n°12 (Ie)
Terminale ES

Exercice 1 (QCM)

1. La fonction ln est définie sur $]0\,;+\infty[$ et est :	□ décroissante sur $]0\,;+\infty[$ □ décroissante sur $]0\,;1]$ puis croissante sur $[1\,;+\infty[$ ■ croissante sur $]0\,;+\infty[$
2. ln(e) vaut :	□ 2,71 ■ 1 □ 0
3. La fonction ln est :	□ strictement positive sur $]0\,;+\infty[$ □ positive sur $]0\,;1]$ puis négative sur $[1\,;+\infty[$ ■ négative sur $]0\,;1]$ puis positive sur $[1\,;+\infty[$
4. $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)=$	■ -2 □ $\frac{1}{2}$ □ 1
5. $\ln(2e)=$	■ ln(2)+1 □ ln(2) □ 2ln(2)
6. Pour a et b positifs, on $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=$	□ ln(a-b) ■ ln(a) – ln(b) □ $\frac{\ln(a)}{\ln(b)}$
7. La fonction $x \to ex+\ln 5$ a pour dérivée :	□ $x \to ex$ □ $x \to ex+\frac{1}{5}$ ■ $x \to e$
8. La fonction $x \to \ln(2x+1)-\ln 3$ a pour dérivée :	□ $x \to \frac{1}{2x+1}-\frac{1}{3}$ □ $x \to \frac{1}{x+1}$ ■ $x \to \frac{2}{2x+1}$
9. Une primitive de la fonction $x \to \frac{-7}{2-4x}$ sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ est	□ $x \to -7\ln(2-4x)$ ■ $x \to \frac{7}{4}\ln(4x-2)$ □ $x \to -\frac{7}{4}\ln(2-4x)$
10. L'équation $\ln(x-1)+\ln(x-4)=\ln(-3x+7)$ a pour solution(s) :	■ n'a pas de solution □ a une unique solution $x=\frac{12}{5}$ □ a deux solutions $x=0{,}5$ et $x=4{,}5$

Remarques :

Les trois premières questions sont des questions de cours.

4. $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\ln(e^2) = -2\ln(e) = -2$

5. $\ln(2e)$=ln(2)+ln(e)= ln(2) + 1

6. question de cours

7. $x \to ex + \ln 5$ a pour dérivée $x \to e$ car ln5 est un nombre et a pour dérivée 0.

8. $x \to \ln(2x+1) - \ln 3$: ln3 est un nombre et a pour dérivée 0 ; $\ln(2x+1) = \ln u \to \frac{u'}{u} = \frac{2}{2x+1}$

9. $x \to \frac{-7}{2-4x}$: $2-4x$ est négatif sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ donc $\ln(2-4x)$ n'existe pas ; on écrit

$$\frac{-7}{2-4x} = \frac{7}{4x-2} = \frac{7}{4} \times \frac{4}{4x-2} = \frac{7}{4} \times \frac{u'}{u} \to \frac{7}{4}\ln u = \frac{7}{4}\ln(4x-2)$$

10. $\ln(x-1) + \ln(x-4) = \ln(-3x+7)$:

x	$-\infty$		1		7/3		4		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$-3x+7$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	

Les trois expressions ne sont jamais positives en même temps donc S = $\varnothing$.

<u>Exercice 2</u>

Soit *f* la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3x + 6x\ln(x) - 1$ dont on donne la courbe représentative en annexe 2.

1.

$\lim\limits_{x\to 0} 3x - 1 = -1$

$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ (Cours)

Donc par addition, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 3x - 1 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ (multiplication)

Donc, par addition, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

2. On admet que *f* est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

$(3x+1)' = 3$

$(x\ln x)' = (uv)' = u'v + uv' = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$

Donc $f'(x) = 3 + 6(\ln x + 1) = 6\ln x + 9$.

a. Résoudre $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6\ln x + 9 = 0 \Leftrightarrow 6\ln x = -9 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}}$$

b. En déduire le tableau de variation complet de *f* sur $]0\,;+\infty[$.

x	0		$e^{-3/2}$		+inf
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$3x-1+6x\ln x$	-1	$\searrow$	$f(e^{-3/2})$	$\nearrow$	+inf

4. Tangente (T) à la courbe de *f* au point d'abscisse 1 :

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

Or $f'(1) = 9 + 6\ln 1 = 9$

$f(1) = 3 - 1 + 6\ln 1 = 2$

$y = 9(x-1) + 2$

$$\boxed{(\text{T}) : \ y = 9x - 7}$$