Correction du devoir n°13 (devoir maison)
Terminale ES

Exercice 1

Un groupe industriel possède deux usines Alpha et Bêta. L'usine Alpha emploie 30 % des salariés, l'usine Bêta 70 %.

La répartition des salaires mensuels dans les deux usines est la suivante :

Salaire mensuel *s* en euros	Pourcentage des salariés de l'usine Alpha	Pourcentage des salariés de l'usine Bêta
$800 \leq s < 1200$	32	22
$1200 \leq s < 1600$	35	43
$1600 \leq s < 2800$	22	23
$2800 \leq s < 3600$	7	12
$3600 \leq s < 6000$	4	0

E « le salarié gagne au moins 1 200 € par mois » ;
A « le salarié travaille dans l'usine Alpha » ;
B « le salarié travaille dans l'usine Bêta ».

1. a Ω = ensemble des salariés du groupe. La loi sur Ω est équirépartie.

$p(A) = \frac{30}{100} = 0,3$; $p(B) = \frac{70}{100} = 0,7$

b. On cherche $P(A \cap E) = p(A) \times P_A(E)$

$P(A) = 0,3$

$P_A(E) = \frac{(35+22+7+4)}{100} = 0,68$

Donc $P(A \cap E)$ =0,68$\times$0,3=0,204.

Pour l'usine Bêta : $P(B \cap E) = P(B) \times P_B(E) = 0,7 \times \frac{43+23+12}{100} = 0,7 \times 0,78 = 0,546$

c. E = $(E \cap A) \cup (E \cap B)$

Les événements $E \cap A$ et $E \cap B$ sont incompatibles donc :

$p(E) = p(E \cap A) + p(E \cap B) = 0,204 + 0,546 = 0,75$

2. On considère maintenant les deux lois numériques X et Y dont les valeurs et les lois de probabilités sont données dans les tableaux suivants :

x_i	1	1,4	2,2	3,2	4,8
$P(X = x_i)$	0,32	0,35	0,22	0,07	0,04

y_i	1	1,4	2,2	3,2
$P(Y = y_i)$	0,22	0,43	0,23	0,12

a. $E(X) = 1\times 0{,}32 + 1{,}4\times 0{,}35 + 2{,}2\times 0{,}22 + 3{,}2\times 0{,}07 + 4{,}8\times 0{,}04 = 1{,}71$

$V(X) = (1\times 0{,}32 + 1{,}4^2\times 0{,}35 + 2{,}2^2\times 0{,}22 + 3{,}2^2\times 0{,}07 + 4{,}8^2\times 0{,}04) - 1{,}71^2$ =3,7092-2,9241=0,7851

$\sigma(X) = \sqrt{0{,}7851} = 0{,}89$

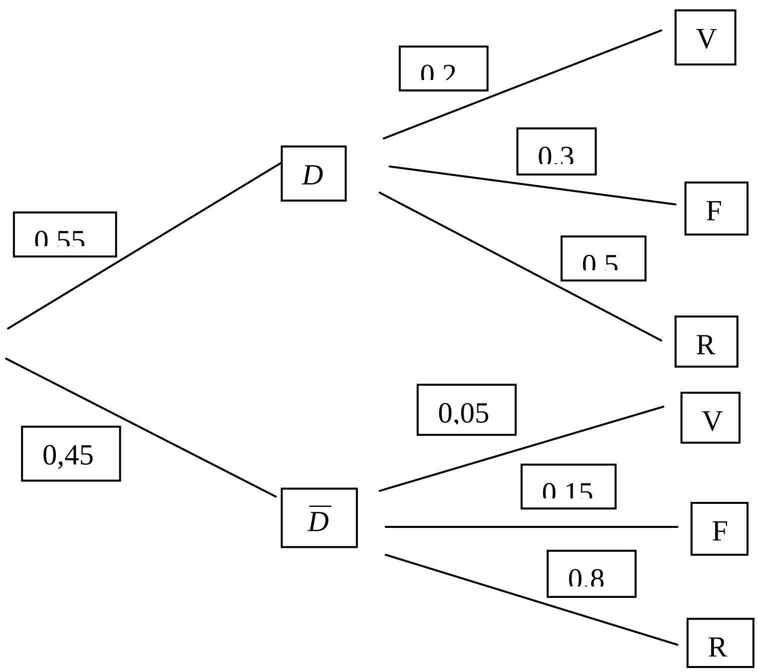
$E(Y) = 1\times 0{,}22 + 1{,}4\times 0{,}43 + 2{,}2\times 0{,}23 + 3{,}2\times 0{,}12 \approx 1{,}71$

$V(Y) = \left(1\times 0{,}22 + 1{,}4^2\times 0{,}43 + 2{,}2^2\times 0{,}23 + 3{,}2^2\times 0{,}12\right) - 1{,}71^2$ =0,4807

$\sigma(Y) = \sqrt{0{,}4807} \approx 0{,}69$.

b. Les salaires moyens sont les mêmes dans les usines Alpha et Bêta mais les salaires sont moins dispersées dans l'usine Bêta.

Exercice 2



On choisit au hasard un étudiant de cette université.

a. On cherche $p\left(D\cap V\right) = p(D)\times p_D(V) = 0{,}55\times 0{,}2 = 0{,}11$ (formule de l'intersection)

b. On cherche $p\left(\overline{D}\cap V\right) = p(\overline{D})\times p_{\overline{D}}(V) = 0{,}45\times 0{,}05 = 0{,}0225$.

c. $V = (V\cap D)\cup(V\cap \overline{D})$ avec $V\cap D$ et $V\cap\overline{D}$ incompatibles.

Donc $p(V) = p(V\cap D) + p(V\cap\overline{D}) = 0{,}11 + 0{,}0225 = 0{,}1325$

d. $F = \left(F\cap D\right)\cup(F\cap\overline{D})$

Donc $p(F) = p(D)\times p_D(F) + p(\overline{D})\times p_{\overline{D}}(F)$ (formule des probabilités totales)

$p(F) = 0{,}55\times 0{,}3 + 0{,}45\times 0{,}15 = 0{,}2325$

e. On cherche $p_F(D) = \dfrac{p(F\cap D)}{p(F)} = \dfrac{0{,}55\times 0{,}3}{0{,}2325} \approx 0{,}71$

Exercice 3

1. $f(x) = \ln(3 - x) + \ln 2 - 2\ln(x + 1)$

ln2 ne pose pas de problème d'existence.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
3-x		+		+	0	−	
x+1		−	0	+		+	

Donc f est définie sur $\left]-1\,;3\right[$

2. $\ln(3-x) + \ln 2 - 2\ln(x+1) \geq 0$

Condition d'existence : x appartient à $\left]-1\,;3\right[$

Résolution :

$\ln(3-x) + \ln 2 \geq 2\ln(x+1)$

$\ln(2(3-x)) \geq \ln(x+1)^2$ car $\ln a + \ln b = \ln(ab)$ pour a et b positifs et $2\ln a = \ln a^2$ pour a positif

$6 - 2x \geq (x+1)^2$ on peut enlever les logarithmes

$6 - 2x \geq x^2 + 2x + 1$

$-x^2 - 2x - 1 + 6 - 2x \geq 0$

$-x^2 - 4x + 5 \geq 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4\times(-1)\times 5 = 16 + 20 = 36 = 6^2$

$x_1 = \dfrac{4-6}{-2} = 1$; $x_2 = \dfrac{4+6}{-2} = -5$

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
-x²-4x+5		−	0	+	0	−	

Solution : En tenant compte de la condition d'existence, $S = \left]-1\,;1\right]$.

Exercice 4

Primitives sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction f telle que :

$$f(x)=\frac{2}{x+1}+\frac{3}{5x+3}$$

$\frac{2}{+1}=2\times\frac{1}{x+1}=2\times\frac{u'}{u}\Rightarrow \textit{primitive}=2\times\ln u=2\ln(x+1)$

$\frac{3}{5x+3}=\frac{3}{5}\times\frac{5}{5x+3}=\frac{3}{5}\times\frac{u'}{u}\Rightarrow \textit{primitive}=\frac{3}{5}\ln u=\frac{3}{5}\ln(5x+3)$

Donc $\boxed{F(x)=2\ln(x+1)+\frac{3}{5}\ln(5x+3)+k,\, k\in R}$

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=3+\frac{\ln(0{,}1x)-2}{x}$

Partie 1. Étude de fonction

1.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\ln(0{,}1x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0}\ln(0{,}1x)-2=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x}=+\infty\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(0{,}1x)-2}{x}=-\infty \text{ donc } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$$

Donc $\boxed{\text{l'axe des ordonnées est asymptote verticale à (C).}}$

2. $f(x)=3+\frac{\ln(0{,}1x)}{x}-\frac{2}{x}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(0{,}1x)}{x}=0 \text{ (donné dans l'énoncé)}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{x}=0\end{array}\right\}\text{donc } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$$

$\boxed{\text{Donc la droite d'équation } y=3 \text{ est asymptote verticale à (C).}}$

3. $\frac{\ln(0{,}1x)-2}{x}=\frac{u}{v}\Rightarrow \textit{dérivée}=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$u(x)=\ln(0{,}1x)-2 \Rightarrow u'(x)=\frac{0{,}1}{0{,}1x}=\frac{1}{x}$$

Donc $f'(x)=0+\dfrac{\frac{1}{x}\times x-(\ln(0{,}1x)-2)}{x^2}=\dfrac{3-\ln(0{,}1x)}{x^2}$

4. Variations de *f*. On cherche le signe de $f'(x)=\dfrac{3-\ln(0{,}1x)}{x^2}$.

$3-\ln(0{,}1x)=0$

$\ln(0{,}1x)=3$

$\ln(0{,}1x)=3\ln e=\ln(e^3)$

$0{,}1x=e^3$

$x=\dfrac{e^3}{0{,}1}=10e^3\approx 200{,}85$

x	0		$10e^3$		$+\infty$
3-ln(0,1x)		+	0	−	
x²		+		+	
(3-ln(0,1x))/x²		+	0	−	

D'où les variations de *f* :

$$f(10e^3)=3+\frac{\ln(e^3)-2}{10e^3}=3+\frac{1}{10e^3}\approx 3{,}005$$

x	0		$10e^3$		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f(x)	$-\infty$	↗	$3+\dfrac{1}{10e^3}$	↘	3

5. *f* est continue sur]0, 200[car dérivable.
f est strictement croissante sur]0, 200[.

Pour tout *x* de]0, 200[, $f(x)\in\left]-\infty\,;f(200)\right]$ avec $f(200)=3+\dfrac{\ln(20)-2}{200}\approx 3{,}01>0$

$0\in\left]-\infty\,;f(200)\right]$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle]0, 200[

$f(1)\approx -1{,}303$ et $f(2)\approx 1{,}195$ donc $\alpha\in\left]1\,;2\right[$

$f(1{,}3)\approx -0{,}108$ et $f(1{,}4)\approx 0{,}167$ donc $\alpha\approx 1{,}3$

D'où le signe de $f(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$3+(\ln(0{,}1x)-2)/x$	‖	$-$	0	$+$	

Partie 2. Application économique

Une entreprise constate que pour un nombre d'objets compris entre 1000 et 200000 la production et la vente de x milliers d'objets dégage un bénéfice total de $B(x)$ milliers d'euros, où $B(x)$ est défini par :

$$B(x) = 3x - 2 + \ln(0{,}1x)$$

1. 2000 = 2 milliers

$B(2) = 4 + \ln(0{,}2) \approx 2{,}391$

Bénéfice moyen pour 2000 objets = $\dfrac{2391}{2000} =\approx 1{,}2$ €

$B(2{,}5) = 5{,}5 + \ln(0{,}25) \approx 4{,}114$

Bénéfice moyen pour 2500 objets = $\dfrac{4114}{2500} \approx 1{,}65$ €

2. Bénéfice moyen $= \dfrac{1000B(x)}{1000x} = \dfrac{B(x)}{x} = \dfrac{3x - 2 + \ln(0{,}1x)}{x} = 3 + \dfrac{\ln(0{,}1x) - 2}{x} = f(x)$

3. $f(x) \geq 0$ pour $x \geq \alpha$ avec $\alpha \approx 1{,}3$

Le bénéfice moyen est positif à partir de 1300 objets (à la centaine près)

Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $f(x) \leq 3 + \dfrac{1}{10e^3} \approx 3{,}005$.

Donc le bénéfice moyen ne pourra jamais atteindre 3,5 €.