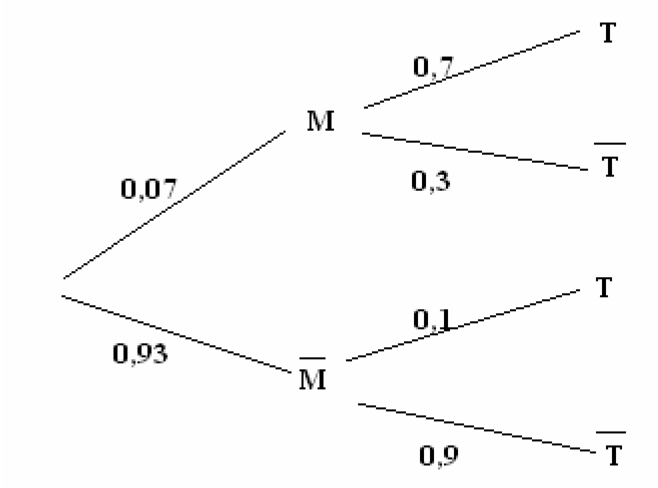
Terminale ES
Correction du bac blanc

<u>Exercice 1</u>
Partie A
1.

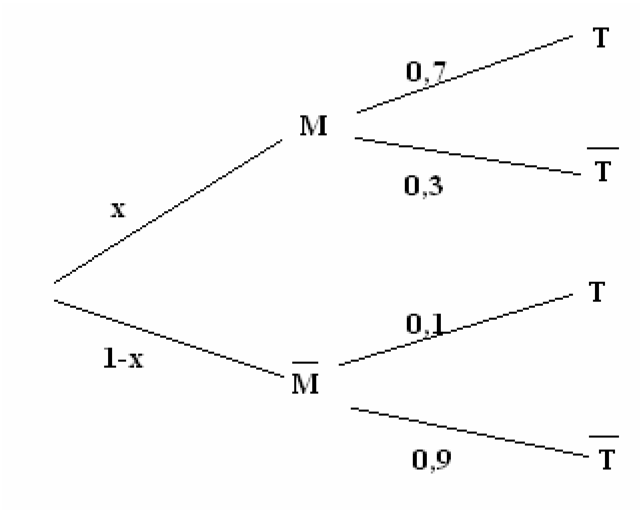


2. $p(M \cap T) = p(M) \times p_M(T) = 0{,}07 \times 0{,}7$
$= 0{,}049.$

$T = (T \cap M) \cup (T \cap \overline{M})$ avec
$(T \cap M)$ et $(T \cap \overline{M})$ incompatibles.
Donc $p(T) = p(T \cap M) + p(T \cap \overline{M})$
$= 0{,}049 + 0{,}93 \times 0{,}1$
(formule des probabilités totales)
Donc $\boxed{p(T) = 0{,}142.}$

3. On cherche $p_T(M) = \dfrac{p(T \cap M)}{p(T)} = \dfrac{0{,}049}{0{,}142} \approx 0{,}345$.

Partie B
1.



2.
$p(M \cap T) = p(M) \times p_M(T) = x \times 0{,}7 = 0{,}7x.$

$T = (T \cap M) \cup (T \cap \overline{M})$ avec
$(T \cap M)$ et $(T \cap \overline{M})$ incompatibles.
Donc $p(T) = p(T \cap M) + p(T \cap \overline{M})$
$= 0{,}7x + (1 - x) \times 0{,}1$ (formule des probabilités totales)
Donc $\boxed{p(T) = 0{,}6x + 0{,}1}$

3. $p_T(M) = \dfrac{p(T \cap M)}{p(T)} = \dfrac{0{,}7x}{0{,}6x + 0{,}1} = \dfrac{0{,}7x \times 10}{(0{,}6x + 0{,}1) \times 10} = \dfrac{7x}{6x + 1}$.

4. Soit f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = \dfrac{7x}{6x+1}$.

$f(x) \geq 0{,}9 \Leftrightarrow \dfrac{7x}{6x+1} \geq 0{,}9$
$\Leftrightarrow 7x \geq 0{,}9(6x+1)$ car $6x + 1 > 0$ sur $[0\,;1]$
$\Leftrightarrow 7x\text{-}5{,}4x \geq 0{,}9$
$\Leftrightarrow 1{,}6x \geq 0{,}9$
$\Leftrightarrow x \geq \dfrac{0{,}9}{1{,}6} = 0{,}5625$

Il faut 56,25 % de malades dans le cheptel pour que la probabilité que l'animal soit malade sachant que le test est positif soit supérieure à 0,9.

Exercice 2

1. $E=(A\cap E)\cup(B\cap E)$ avec $(A\cap E)$ et $(B\cap E)$ incompatibles.

Donc $p(E)=p(A\cap E)+p(B\cap E)=0{,}35\times0{,}1+0{,}65\times0{,}5=0{,}035+0{,}325=0{,}36$

Réponse d.

2. A et G sont indépendants donc $p_A(G)=p_{\bar{A}}(G)=p(G)=0{,}3$.

Réponse c.

3. $p(\text{ne jamais obtenir A})=(0{,}65)^4$ donc

$p(\text{obtenir au moins un A})=1-(0{,}65)^4=0{,}82149375$.

Réponse b.

Exercice 3

Soit *f* la fonction définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$.

1. Eléments du tableau :

Calcul de $f'(x)$:

f est de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec $u(x)=x\ln x$ et $u'(x)=1\times\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=\ln x+1$.

D'où $f'(x)=\dfrac{-1-\ln x}{(x\ln x)^2}$

Pour tout *x* de $]0;1[\cup]1;+\infty[$, $(x\ln x)^2>0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de -1-lnx.

$-1-\ln x\geq0\Leftrightarrow-\ln x\geq1\Leftrightarrow\ln x\leq-1\Leftrightarrow x\leq e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

D'où le tableau de signe et le tableau de variation de *f* :

x	0		1/e		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	||	−	
1/(xln*x*)		↗		↘	||	↘	

Limites de f :

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}} x\ln x=0^-$ (cours) (0^- car $\ln x<0$ sur $]0;1[$) donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}} f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}} x\ln x=0^-$ ($\ln1=0$) (0^- car $\ln x<0$ sur $]0;1[$) donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}} f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}} x\ln x=0^+$ ($\ln1=0$) (0^+ car $\ln x>0$ sur $]1;+\infty[$) donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}} f(x)=+\infty$

$f(\frac{1}{e}) = \dfrac{1}{\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)} = \dfrac{1}{\frac{1}{e}(-\ln e)} = \dfrac{1}{-\frac{1}{e}} = -e$.

2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (C).

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (C).

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à (C).

3. a. D'après le tableau de variation de *f*, $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$. Donc la tangente à (C) au point d'abscisse $\frac{1}{e}$ est horizontale. De plus $f\left(\frac{1}{e}\right) = -e$. Donc $\boxed{\text{(T) : } y = -e.}$

b. Tangente au point d'abscisse e :

$f'(e) = \dfrac{-1-\ln e}{(e\ln e)^2} = \dfrac{-1-1}{e^2} = \dfrac{-2}{e^2}$

$f(e) = \dfrac{1}{e\ln e} = \dfrac{1}{e}$

D'où (T') : $y = \dfrac{-2}{e^2}(x-e) + \dfrac{1}{e} = \dfrac{-2}{e^2}x + \dfrac{2}{e} + \dfrac{1}{e}$

$\boxed{\text{(T') : } y = -\dfrac{2}{e^2}x + \dfrac{3}{e}}$

4. Pour $k \in \left]-\infty\,;-\mathrm{e}\right[$, l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.

Pour $k = -e$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution $x = \dfrac{1}{e}$.

Pour $k \in \left]0\,;+\infty\right[$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution.

Pour $k \in \left]-e\,,0\right]$, l'équation $f(x) = k$ n'admet pas de solution.

<u>Exercice 4</u>

On définit *f* sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{x^2}{2} + 2$.

Partie A

On pose pour $x > 0$, $g(x) = x^3 + \ln x - 1$.

1. $g'(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{x}$.

Or pour tout x de $\left]0\,;+\infty\right[$, $3x^2 + \dfrac{1}{x} > 0$.

Donc pour tout x de $\left]0\,;+\infty\right[$, $g'(x) > 0$ et par suite, g est strictement croissante sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

2. $g(0{,}5) = 0{,}125 + \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) - 1 = -0{,}875 - \ln 2. < 0$

$g(1) = 1 + \ln 1 - 1 = 0$

$g(2) = 7 + \ln 2 > 0$

$g(e)= e^3 + \ln(e) - 1 = e^3 > 0$

3. g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et $g(1) = 0$
Donc g est négative sur $]0\,;1]$ et g est positive sur $[1\,;+\infty[$.

Partie B

1. a.

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \frac{u}{v} \Rightarrow \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{2x}{2} = x$$

D'où $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} - x = \dfrac{1-\ln x - x^3}{x^2}$.

b. Donc $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{x^2}$

c. Tableau De signes De $f'(x)$

x	0		1		$+\infty$
$x^3+\ln x-1$	‖	$-$	0	$+$	
x^2	‖	$+$		$+$	
$-g(x)/x^2$	‖	$+$	0	$-$	

Tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$(\ln x/x)-(x^2/2)+2$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	1.5	$\searrow$	$-\infty$

d. Limite en 0 :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x>0\\ x\to 0}} \ln x = -\infty \text{ et } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = +\infty \text{ donc } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\ln x}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} -\frac{x^2}{2} + 2 = 2 \end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty$$

Limite en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ (cours)} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{2} + 2 = -\infty \end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

e. f est croissante sur $]0\,;1]$ puis décroissante sur $[1;+\infty[$ donc f admet un maximum en x=1. Ce maximum vaut 1,5 Donc pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $f(x)\leq 1{,}5$.

2. A est le point de (C) d'abscisse e.

a. $f'(e)=\dfrac{-g(e)}{e^2}=\dfrac{-e^3}{e^2}=-e$

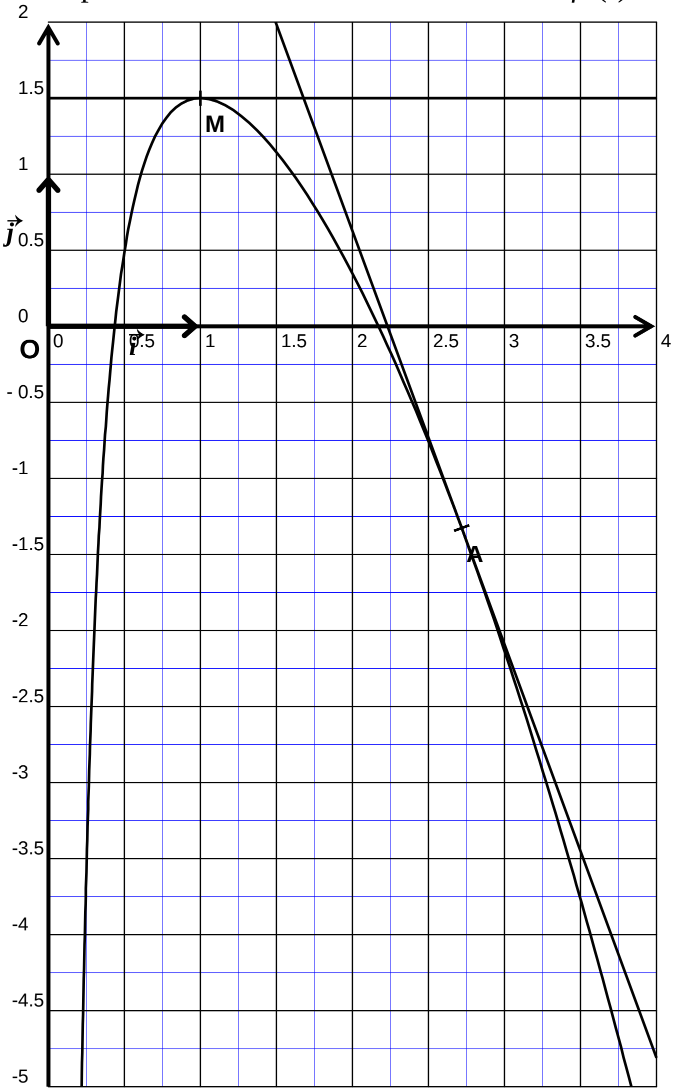
$$f(e)=\frac{\ln e}{e}-\frac{e^2}{2}+2=\frac{1}{e}-\frac{e^2}{2}+2$$

$$(T_e):y=-e(x-e)+\frac{1}{e}-\frac{e^2}{2}+2$$

$$\boxed{(T_e):y=-ex+\frac{1}{e}+\frac{e^2}{2}+2}$$

Pour tracer la tangente, on place A(e ; f(e)) et on part de ce point, on avance d'une unité, on descend de e unités. Ce qui donne un deuxième point de la droite.

b. La tangente au point d'abscisse 1 est horizontale car $f'(1)=0$



2. f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ donc continue sur $]0\,;+\infty[$.
f est croissante sur $]0\,;1]$. Pour tout x de $]0\,;1]$, $f(x)\in\left]-\infty\,;1{,}5\right]$.
$0\in\left]-\infty\,;1{,}5\right]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0\,;1]$
f est décroissante sur $[1\,;+\infty[$. Pour tout x de $[1\,;+\infty[$, $f(x)\in\left]-\infty\,;1{,}5\right]$.
$0\in\left]-\infty\,;1{,}5\right]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution β dans $[1\,;+\infty[$.

b.
$f(0{,}4358)\approx< 0$

$f(0{,}4359)\approx> 0$

$f(2{,}1712)\approx> 0$

$f(2{,}1713)\approx< 0$

D'où le signe de f (par lecture du tableau de variations de f et connaissant les valeurs qui annulent) :