Terminale ES	**Devoir n°15 (Dm)**	
Donné le : 24/03/06	Pour le : 31/03/2006	

Exercice 1 (obligatoire) (5 points)

Une résidence de vacances propose deux types d'appartements (studio et deux-pièces) à louer à la semaine.

L'appartement doit être restitué parfaitement propre en fin de séjour.

Le locataire peut décider de le nettoyer lui-même ou peut choisir l'une des deux formules d'entretien suivantes : la formule Simple (nettoyage de l'appartement en fin de séjour par le personnel d'entretien) ou la formule Confort (nettoyage quotidien du logement durant la semaine et nettoyage complet en fin de séjour par le personnel d'entretien).

Le gestionnaire a constaté que :

- 60 % des locataires optent pour un studio et parmi ceux-ci 20 % ne souscrivent aucune formule d'entretien.
- La formule Simple a beaucoup de succès : elle est choisie par 45 % des locataires de studio et par 55 % des locataires de deux-pièces.
- 18% des locataires ne souscrivent aucune formule.

On rencontre un résident au hasard.

Soit S l'événement « le résident a loué un studio » ;

A l'événement « le résident a souscrit la formule Simple » ;

B l'événement « le résident a souscrit la formule Confort » ;

R l'événement « le résident n'a souscrit aucune formule d'entretien ».

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. a. Quelle est la probabilité que le résident ait loué un deux-pièces ?

b. Calculer $p_S(B)$?

3. a. Calculer p($R \cap S$) ; en déduire $p\left(R \cap \overline{S}\right)$.

b. Le résident a loué un deux-pièces. Montrer que la probabilité qu'il assure lui-même le nettoyage de son appartement est 0,15.

4. Le gestionnaire affirme que près de la moitié des résidents choisit la formule Simple. Présenter les calculs qui justifient son affirmation.

5. La location d'un studio à la semaine coûte 350 euros, celle d'un deux-pièces 480 euros.

La formule Simple coûte 20 euros et la formule Confort 40 euros.

Soit L le coût de la semaine (loyer et entretien) ; il prend différentes valeurs L_i. On désigne par p_i la probabilité que le coût de la semaine soit égal à L_i.

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

L_i	350	370	390	480	500	520
Pi	0,12		0,21			0,12

b. Calculer l'espérance de L. En donner une interprétation.

<u>Exercice 2 (obligatoire)(5points)</u>

Les détails des calculs statistiques ne sont pas demandés.

La production nette d'électricité nucléaire en France, en milliards de kWh est donnée par le tableau ci-après :

Année x_i	85	90	95	96	97	98	99
Production y_i	213	298	359	378	376	368	382

1. Le plan est rapporté à un repère orthogonal :
sur l'axe des abscisses, on placera 84 à l'origine et on choisira 1 cm pour 1 an ;
sur l'axe des ordonnées, on placera 0 à l'origine et on choisira 1 cm pour 20 milliards de kWh.

a. Représenter le nuage des points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$

b. Quelles sont les coordonnées du point moyen G ?

c. Placer G.

2. Ajustement affine

a. En utilisant la méthode des moindres carrés, donner une équation de la droite de régression de y en x. Les coefficients seront arrondis au centième.

b. Tracer cette droite sur le graphique. Expliquer la méthode utilisée pour le tracé.

3. Estimation de production

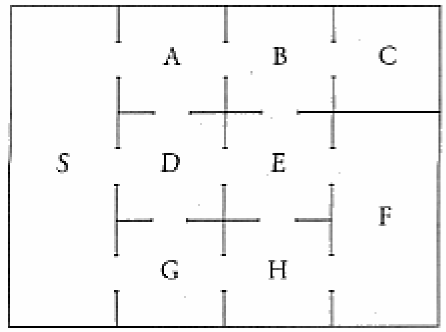
a. En supposant que le modèle affine reste valable jusqu'en 2020, estimer à l'aide de ce modèle, au milliard de kWh près, la production d'électricité nucléaire en France en 2020.

b. On pose $X = \ln(x)$. L'équation de la droite de régression de y en X obtenue par la méthode des moindres carrés est $y = 1\,119X - 4\,745$.
En supposant que le modèle logarithmique reste valable jusqu'en 2020, estimer à l'aide de ce modèle, au milliard de kWh près, la production d'électricité nucléaire en France en 2020.

<u>Exercice 2 (Spécialité) (5points)</u>

Partie A

Un musée est constitué de 9 salles notées A, B, C, D, E, F, G, H et S.
Le plan du musée est représenté ci-contre :



Ainsi, un visiteur qui se trouve dans la salle S peut atteindre directement les salles A, D ou G.
S'il se trouve dans la salle C, il peut se rendre directement dans la salle B, mais pas dans la salle F.
On s'intéresse au parcours d'un visiteur dans ce musée. On ne se préoccupe pas de la manière dont le visiteur accède au musée ni comment il en sort.
Cette situation peut être modélisée par un graphe, les sommets étant les noms des salles, les arêtes représentant les portes de communication.

1. Dessiner un graphe modélisant la situation décrite.

2. Est-il possible de visiter le musée, en empruntant chaque porte une fois et une seule ?

Justifier en utilisant un théorème du cours sur les graphes.

3. Pour rompre une éventuelle monotonie, le conservateur du musée souhaite différencier chaque salle de sa ou des salles voisines (c'est-à-dire accessibles par une porte) par la moquette posée au sol.
Quel est le nombre minimum de types de moquettes nécessaires pour répondre à ce souhait ? Justifier.

Partie B

On note M la matrice à 9 lignes et 9 colonnes associée au graphe précédent, en convenant de l'ordre suivant des salles : S, A, B, C, D, E, F, G, H.
Le graphe n'étant pas orienté, comment cela se traduit-il sur la matrice ?

Partie C

On donne la matrice:

$$M^4 = \begin{pmatrix} 18 & 12 & 11 & 02 & 20 & 12 & 06 & 12 & 12 \\ 12 & 20 & 03 & 06 & 11 & 20 & 05 & 18 & 05 \\ 11 & 03 & 16 & 00 & 19 & 03 & 08 & 04 & 12 \\ 02 & 06 & 00 & 03 & 01 & 07 & 01 & 04 & 01 \\ 20 & 11 & 19 & 01 & 31 & 09 & 11 & 12 & 19 \\ 12 & 20 & 03 & 07 & 09 & 28 & 09 & 20 & 09 \\ 06 & 05 & 08 & 01 & 11 & 09 & 09 & 08 & 09 \\ 12 & 18 & 04 & 04 & 12 & 20 & 08 & 20 & 06 \\ 12 & 05 & 12 & 01 & 19 & 09 & 09 & 06 & 17 \end{pmatrix}$$

1. Combien y a-t-il de chemins qui, en 4 étapes, partent de D et reviennent à D ?

2. Combien y a-t-il de chemins qui, en 4 étapes, partent de S et reviennent à C ?

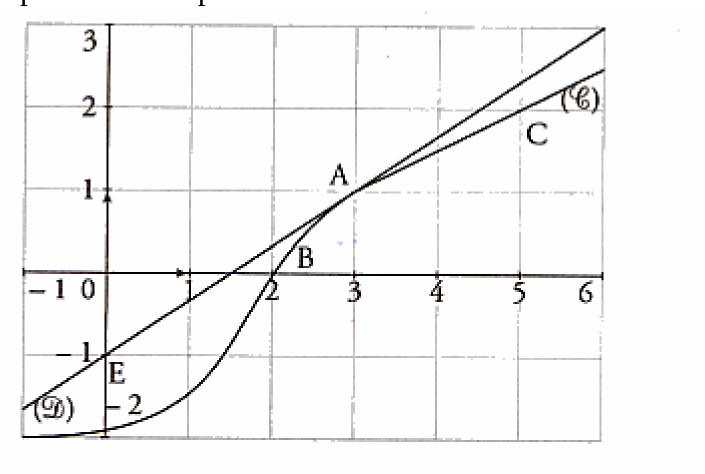
Les citer.

3. Est-il toujours possible de joindre en 4 étapes deux salles quelconques ? Justifier.

Exercice 3 (obligatoire) (4 points)

Soit une fonction *f* dérivable et strictement croissante sur [- 1 ; 6].
La courbe (C) représentant *f* passe par B(2 ; 0) et C(5 ; 2).

Sa tangente (D) au point A(3 ; 1) passe par E(0 ; - 1) .
Le graphique donné pourra être exploité dans tout l'exercice.



On désigne par ln la fonction logarithme népérien. Soit *g* la fonction définie par :

$$g(x) = \ln [f(x)].$$

1. Pour quelles valeurs de *x*, *g*(*x*) est-elle définie ? On note I l'intervalle trouvé.
2. Quel est le sens de variation de *g* sur I (justifier) ?
3. Résoudre dans l'intervalle I l'équation *g*(*x*) = 0.
4. Donner une valeur décimale approchée de *g*(5) à 0,01 près.
5. Exprimer *g*'(*x*) en fonction de *f*(*x*) et de $f'(x)$. En déduire la valeur de *g*'(3).
6. Quelle est la limite de la fonction *g* en 2 ? Interpréter graphiquement ce résultat.
7. En utilisant tous les résultats précédents, donner dans un repère orthonormal (l'unité graphique est le centimètre) l'allure de la courbe (F) représentant la fonction *g* ainsi que sa tangente au point d'abscisse 3.

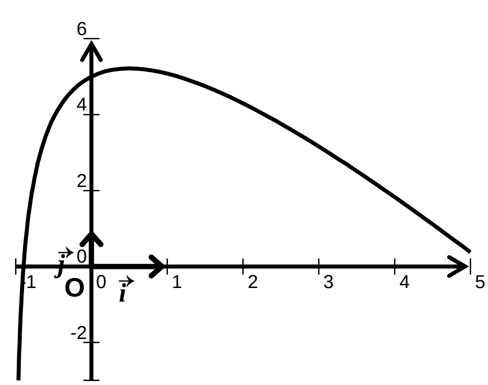
Exercice 4 (obligatoire) (6 points)

Partie A

On considère la fonction *f* définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = ax + b + 3\ln(x+1)$

où *a* et *b* désignent deux réels que l'on déterminera dans la question 2.
On appelle C*f* sa courbe représentative.
La figure ci-contre représente une partie de cette courbe.

C*f* vérifie les conditions suivantes : elle passe par le point A(0 ; 5) et elle admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.



1. En utilisant les données de l'énoncé, que peut-on dire du sens de variation de *f* ?
2. Déterminer *a* et *b*.

Partie B

On suppose désormais que la fonction *f* est définie sur $\left]-1\,;+\infty\right[$ par :

$$f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x+1)$$

1. a. Calculer la limite de *f* en - 1. Interpréter graphiquement le résultat.

b. En admettant que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 0$, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de *f*. Dresser le tableau de variation. Préciser la valeur exacte du maximum de *f*.

3. Tracer C*f* et les asymptotes éventuelles dans un plan muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm)

4. a. Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$\alpha < 0 < \beta \text{ et } f(\alpha) = f(\beta) = 0$$

b. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de α et β.

c. En déduire le signe de *f*(*x*) sur $\left]-1\,;+\infty\right[$.

5. Soit *g* la fonction définie sur $\left]-1\,;+\infty\right[$] par : $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$

a. Calculer $g'(x)$.

b. En déduire l'expression de la primitive de *f* s'annulant pour x = 0.

Partie C

Une imprimerie a une capacité de production de 5 000 ouvrages par jour.
Une étude a montré que le coût marginal peut être modélisé par *f*(*q*) (en milliers d'euros) où *q* désigne la quantité d'ouvrages imprimés (en milliers).
On rappelle que le coût marginal correspond à la dérivée du coût total.

1. a. Calculer $\int_0^5 f(q)dq$

b. En déduire le coût total en euros de fabrication de 5 000 ouvrages.

2. L'imprimeur compte réaliser en deux jours une commande de 8 000 ouvrages. Il hésite entre deux possibilités :

5 000 ouvrages le premier jour puis 3 000 le second,
4 000 ouvrages pendant deux jours.

Quelle est l'option la plus rentable ?