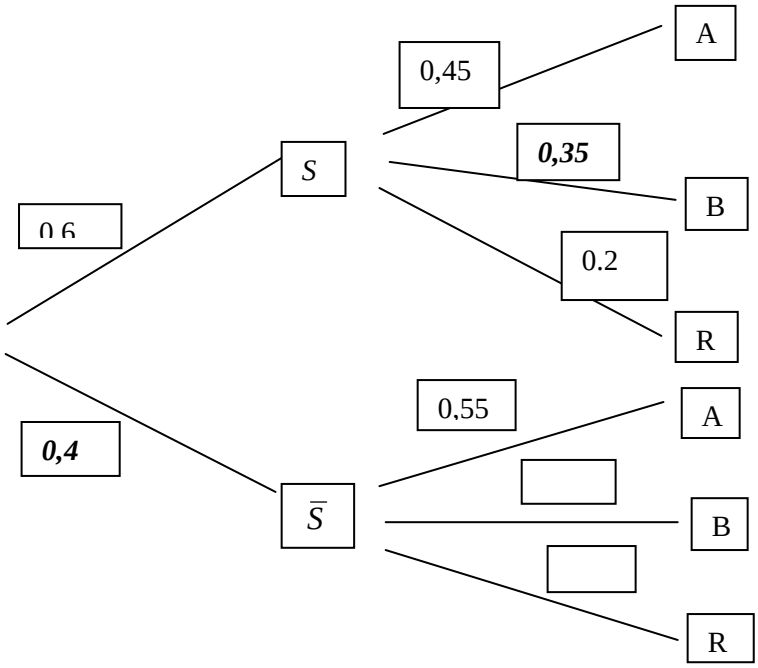
Terminale ES
Correction du devoir n°15 (Dm)

Exercice 1

1.



Il manque des données dans l'énoncé pour avoir l'arbre complet. Le but de l'exercice est de déterminer ce qui manque.

2. a. $p(\overline{S}) = 1 - p(S) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

b. $p_S(B) = 1 - p_S(A) - p_S(R) = 1 - 0{,}45 - 0{,}2 = 0{,}35$

3. a. $p(R \cap S) = p(S) \times p_R(S)$ formule de l'intersection (R et S sont dépendants).

$= 0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}12$

On sait que $p(R) = 0{,}18$

Or $p(R) = p(R \cap S) + p(R \cap \overline{S})$ avec $R \cap S$ et $R \cap \overline{S}$ incompatibles.

Donc $0{,}18 = 0{,}12 + p(R \cap \overline{S}) \Rightarrow p(R \cap \overline{S}) = 0{,}18 - 0{,}12 = 0{,}06$.

b. On cherche $p_{\overline{S}}(R) = \dfrac{p(R \cap \overline{S})}{p(\overline{S})} = \dfrac{0{,}06}{0{,}4} = 0{,}15$.

4. On cherche $p(A)$.

$A = (A \cap S) \cup (A \cap \overline{S})$ avec $A \cap S$ et $A \cap \overline{S}$ incompatibles.

Donc

$p(A) = p(A \cap S) + p(A \cap \overline{S})$

$= p(S) \times p_S(A) + p(\overline{S}) \times p_{\overline{S}} A)$

$= 0{,}6 \times 0{,}45 + 0{,}4 \times 0{,}55 = 0{,}49$

49% des locataires choisissent la formule Simple donc le gestionnaire a raison en affirmant que c'est près de la moitié.

5. a.

L_i	350	370	390	480	500	520
Pi	0,12	***0,27***	0,21	***0,06***	***0,22***	0,12

Un coût de 370 € correspond à une location de studio plus une formule simple.
Or $p(S \cap A) = 0{,}6 \times 0{,}45 = 0{,}27$.

Un coût de 480 € correspond à la location d'un deux-pièces sans nettoyage.
Or $p(\overline{S} \cap R) = 0{,}06$ (Question précédente).

Un coût de 500 € correspond à une location d'un deux pièces et d'une formule simple.
Or $p(\overline{S} \cap A) = p(\overline{S}) \times p_{\overline{S}}(A) = 0{,}4 \times 0{,}55 = 0{,}22$.

On vérifie que la somme des probabilités du tableau est égale à 1 :
0,12 + 0,27 + 0,21 + 0,06 + 0,22 + 0,12 = 1.

b. $E(L) = 0{,}12 \times 350 + 0{,}27 \times 370 + 0{,}21 \times 390 + 0{,}06 \times 480 + 0{,}22 \times 500 + 0{,}12 \times 520 = 425$
En moyenne, un vacancier va dépenser 425 € de logement pour son séjour d'une semaine.

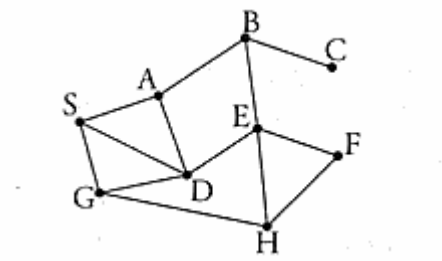
Exercice 2 (spécialité)

Partie A

1. Graphe modélisant les communications entre les salles.

Chaque arête du graphe représente une porte de communication entre les salles. On obtient le graphe ci-contre.

2. S'il était possible de visiter le musée en empruntant chaque porte une fois et une seule, le graphe admettrait une chaîne eulérienne. Or on sait qu'un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si il existe deux et seulement deux sommets de degré impair.



sommets	S	A	B	C	D	E	F	G	H
degré	3	3	3	1	4	4	2	3	3

Ici, il y a au moins trois sommets S, A, B de degré impair. Il est donc impossible de visiter le musée en empruntant une fois et une seule chacune des portes.

3. Recherche du nombre chromatique du graphe

Différencier chaque salle de sa ou des salles voisines revient à colorier le graphe avec le minimum de couleur.

• On remarque qu'il y a un sous-graphe complet d'ordre 3 (SAD) et que le degré le plus élevé des sommets est 4 donc le nombre chromatique X est compris entre 3 et 5: $\boxed{3 \leq X \leq 5}$.(1)

Selon l'algorithme de Welsh-Powell, attribuons les types de moquettes (ou les couleurs) aux sommets du graphe en les rangeant dans l'ordre décroissant de leur degré :

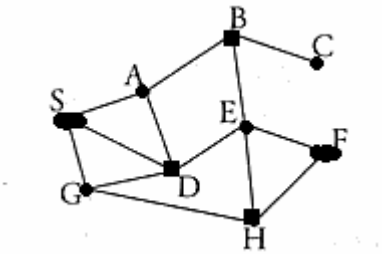
D E S A B G H F C

Le type n° 1 à la salle D : on peut alors colorier B et H de la même couleur.

Le type n°2 à E : on peut alors colorier A, G et C de la même couleur.

Le type n°3 à S : on peut alors colorier F de la même couleur.

Il est donc possible de différencier les salles avec 3 types de moquettes.



Le nombre chromatique X est donc inférieur ou égal à 3.

De l'inégalité (1), on déduit alors que $X = 3$.

Il faut donc au minimum 3 types de moquettes pour différencier chacune des salles de sa ou des salles voisines.

Partie B

La matrice M est symétrique par rapport à la première diagonale. La première diagonale ne comporte que des zéros.

Partie C

La matrice M^4 permet de connaître le nombre de chaînes de longueur 4 reliant un sommet à un autre sommet du graphe.

1. Le nombre de chemins (ou de chaînes) de 4 étapes partant de D et revenant à D est égal au coefficient situé sur la 5e ligne et sur la 5e colonne : il y en a 31.

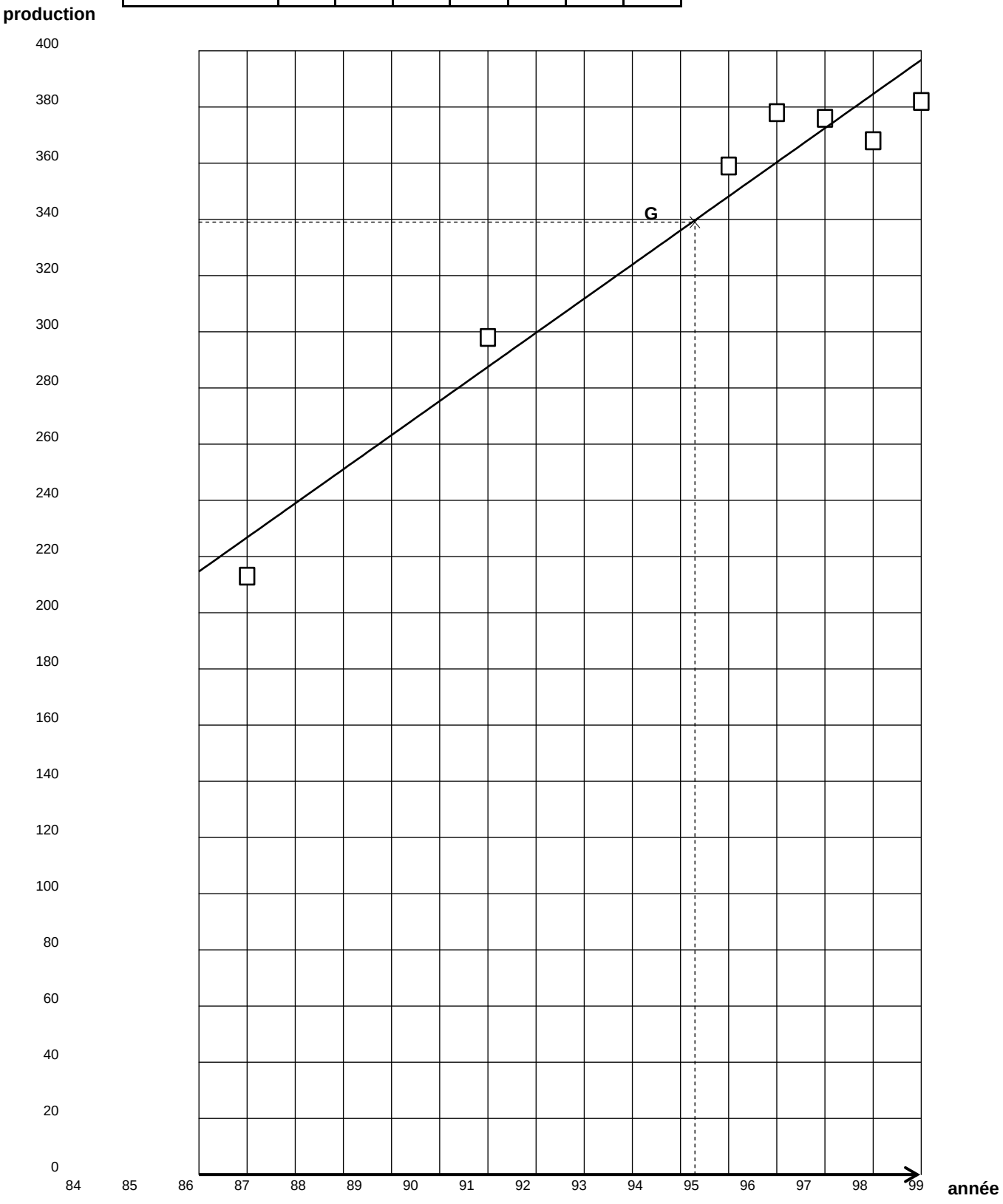
2. Les chemins comportant 4 étapes, partant de S et revenant à C sont au nombre de 2. C'est le coefficient de la 1è ligne, 4e colonne. Ces chemins sont : S-D-A-B-C ; S-D-E-B-C

3. La matrice M^4 comporte deux termes nuls. Cela indique qu'il n'y a pas de chaîne de longueur 4 entre deux sommets. Ces deux sommets sont B et C.
Il n'y a pas de chemins de 4 étapes entre les salles B et C.

Exercice 2 (obligatoire)

La production nette d'électricité nucléaire en France, en milliards de kWh est donnée par le tableau ci-après :

Année x_i	85	90	95	96	97	98	99
Production y_i	213	298	359	378	376	368	382



Point moyen G :

$\frac{85 + 90 + 95 + 96 + 97 + 98 + 99}{7} 94,3$

$\frac{213 + 298 + 359 + 378 + 376 + 368 + 382}{7} \approx 339$

Donc G(94,3 ; 339)

2. Ajustement affine

a. D'après la calculatrice, $a \approx 12{,}14$ et $b \approx -805{,}09$.

Donc la droite de régression par la méthode des moindres carrés a pour équation $y = 12{,}14x - 805{,}09$.

b. On cherche deux points de la droite en donnant deux valeurs à x entre 84 et 99.

x	90	99
y	288	397

3. Estimation de production

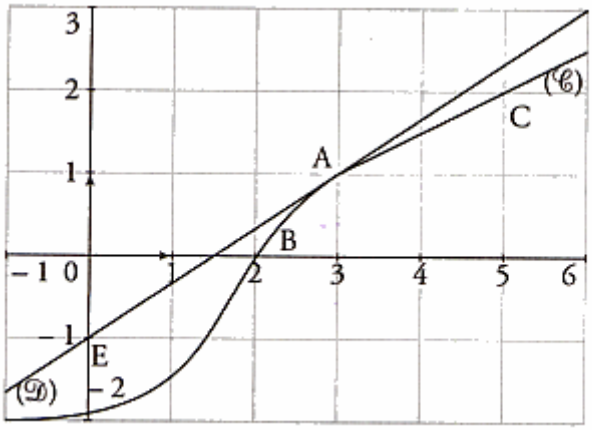
a. En supposant que le modèle affine reste valable jusqu'en 2020,
2020 correspond à l'année 120
Or 12,14*120-805,09 ≈ 651,71.
En 2020, la production sera de 652 milliards de Kwh .

b. On pose $X = \ln(x)$. L'équation de la droite de régression de y en X obtenue par la méthode des moindres carrés est $y = 1\,119X - 4\,745$.
1119*ln(120)-4745 ≈ 612,20.
En 2020, la production est estimée par cette méthode à 612 milliards de Kwh.

Exercice 3

Soit une fonction *f* dérivable et strictement croissante sur [- 1 ; 6].
La courbe (C) représentant *f* passe par B(2 ; 0) et C(5 ; 2).

Sa tangente (D) au point A(3 ; 1) passe par E(0 ; - 1) .
Le graphique donné pourra être exploité dans tout l'exercice.



On désigne par ln la fonction logarithme népérien. Soit *g* la fonction définie par :

$$g(x) = \ln [f(x)].$$

1. La fonction ln n'est définie que sur $]0;+\infty[$ donc pour que la fonction *g* soit définie, il faut que $f(x)$ soit strictement positif. Ce qui est le cas sur $]-2;6[$.
   g est définie sur $I =]-2;6[$

2. La fonction ln étant strictement croissante sur $]0;+\infty[$, *f* et ln*f* ont le même sens de variation pour tout *x* tel que $f(x) > 0$.
Donc *g* est strictement croissante sur $]-2;6[$

3. $g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln[f(x)] = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1$ car 1 est la seule valeur qui annule ln*x*.
Or d'après le graphique, $f(x) = 1$ pour *x*=3.
Soit $S = \{3\}$.

4. $g(5) = \ln(f(5)) = \ln 2 \approx 0{,}69$.

5. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ donc $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

$f(3)=1$

$f'(3) =$ coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 3. Or cette tangente est la droite (AE).

Donc $f'(3) = \dfrac{1-(-1)}{3-0} = \dfrac{2}{3}$.

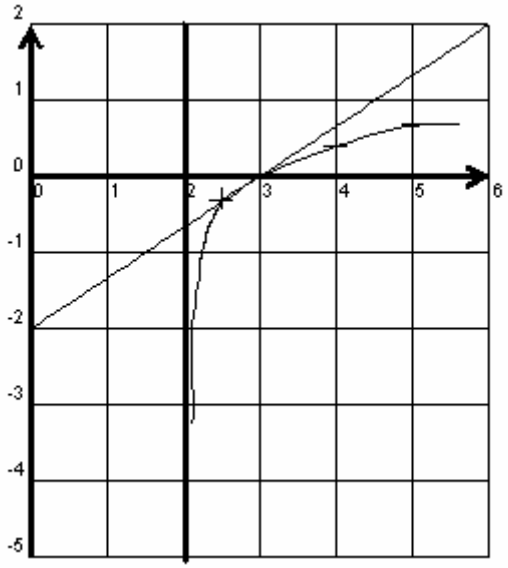
D'où $g'(3) = \dfrac{2}{3}$.

6. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} g(x)$:

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = 0^+$

$\lim\limits_{X \to 0^+} \ln X = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} g(x) = -\infty$

Donc la droite d'équation x = 2 est asymptote verticale.



Exercice 4

Partie A

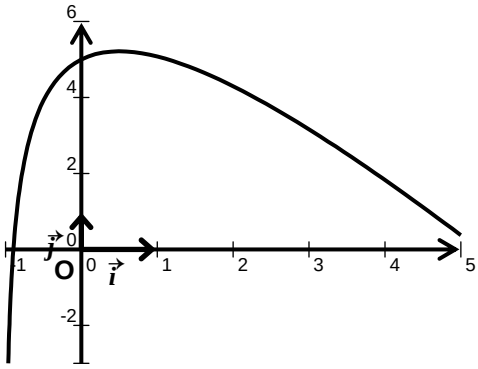
On considère la fonction *f* définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x)=ax+b+3\ln(x+1)$

où *a* et *b* désignent deux réels que l'on déterminera dans la question 2.

On appelle C*f* sa courbe représentative.

La figure ci-contre représente une partie de cette courbe.

C*f* vérifie les conditions suivantes : elle passe par le point A(0 ; 5) et elle admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.



1. D'après le graphique, *f* est croissante puis décroissante.

Elle admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0,5. Donc le changement de variation a lieu en ce point.

D'où *f* est croissante sur $\left]-1;\frac{1}{2}\right]$ puis décroissante sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

2. D'après l'énoncé, on a $f(0)=5$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

Or $f(0)=5 \Leftrightarrow b+3\ln 1=5 \Leftrightarrow b=5$

$f'(x)=a+\frac{3}{x+1}$ donc $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow a+\frac{3}{\frac{1}{2}+1}=0 \Leftrightarrow a=-3\times\frac{2}{3}=-2$

Donc $f(x)=-2x+5+3\ln(x+1)$

Partie B

On suppose désormais que la fonction *f* est définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x+1)$$

1. a.

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} -2x+5 = 7$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} x+1 = 0^+ \\ \lim\limits_{X \to 0^+} \ln X = -\infty \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \ln(x+1) = -\infty$

soit $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$

La droite d'équation x = -1 est asymptote verticale à la courbe de *f*.

b. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 0$.

$$f(x) = x\left[-2 + \frac{5}{x} + 3\frac{\ln(x+1)}{x}\right]$$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{x} = 0 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} -2 + \dfrac{5}{x} + 3\dfrac{\ln(x+1)}{x} = -2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

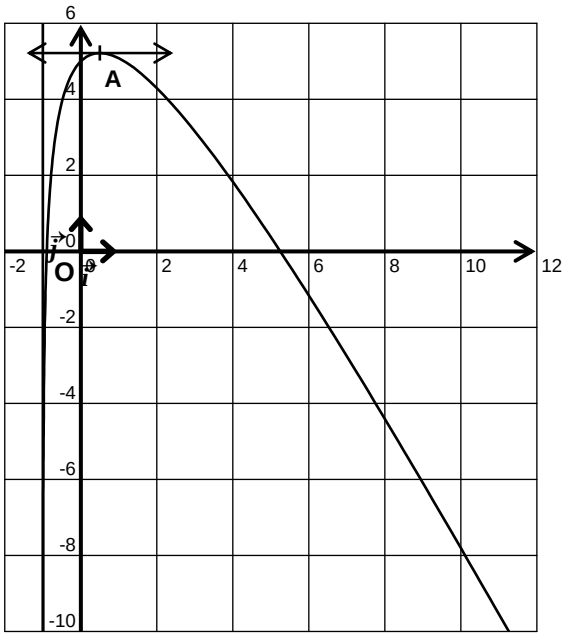
Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

2. $f'(x) = -2 + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{-2(x+1)+3}{x+1} = \dfrac{-2x+1}{x+1}$

x	-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
-2x+1		+	0	−	
x+1		+	|	+	
(-2x+1)/(x+1)		+	0	−	

x	-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
-2x+5+3ln(x+1)	$-\infty$	↗	4+3ln(1,5)	↘	$-\infty$

3.



4. a. f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ donc continue sur $]-1;+\infty[$.

Sur $\left]-1;\frac{1}{2}\right]$, f est strictement croissante.

Pour tout x de $\left]-1;\frac{1}{2}\right]$, $f(x)\in]-\infty;4+3\ln(1,5)]$.

$0\in]-\infty;4+3\ln(1,5)]$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\left]-1;\frac{1}{2}\right]$.

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\infty$ et $f(0)= 5$ donc $\alpha<0$.

Sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$, f est strictement décroissante.

Pour tout x de $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$, $f(x)\in]-\infty;4+3\ln(1,5)]$.

$0\in]-\infty;4+3\ln(1,5)]$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution β dans $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$. Soit $\beta>0$.

b. $f(-0,9)\approx -0,10$ et $f(-0,8)\approx 1,77$ donc $-0,9\le\alpha\le -0,8$

$f(5,2)\approx 0,07$ et $f(5,3)\approx -0,07$ donc $5,2\le\beta\le 5,3$

$f(-0,9)\approx -0,10$ et $f(-0,89)\approx 0,15$ donc $\boxed{\alpha\approx -0,9}$

$f(5,24)\approx 0,013$ et $f(5,25)\approx -0,002$ donc $\boxed{\beta\approx 5,25}$

c.

x	-1	α	β	$+\infty$
$-2x+5+3\ln(x+1)$		$-$	$-$	$-$

5. Soit *g* la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $g(x)=(x+1)\ln(x+1)-x$

a. $g'(x)=1\times\ln(x+1)+(x+1)\times\dfrac{1}{x+1}-1=\ln(x+1)+1-1=\ln(x+1)$

b. La dérivée de *g* est la fonction $x\to\ln(x+1)$ donc une primitive de la fonction $x\to\ln(x+1)$ est la fonction *g*.

Donc $F(x)=-x^2+5x+3\left[(x+1)\ln(x+1)-x\right]+k=-x^2+2x+3(x+1)\ln(x+1)+k$

On veut F(0) = 0 donc k = 0

Partie C

Une imprimerie a une capacité de production de 5 000 ouvrages par jour.
Une étude a montré que le coût marginal peut être modélisé par *f*(*q*) (en milliers d'euros) où *q* désigne la quantité d'ouvrages imprimés (en milliers).
On rappelle que le coût marginal correspond à la dérivée du coût total.

1. a. $\int_0^5 f(q)dq = F(5)=-25+10+18\ln 6=-15+18\ln 6\approx 17{,}251$

b. Le coût total en euros de fabrication de 5 000 ouvrages est de 17251 €.

2. L'imprimeur compte réaliser en deux jours une commande de 8 000 ouvrages. Il hésite entre deux possibilités :

_ 5 000 ouvrages le premier jour puis 3 000 le second : le coût sera alors de $F(5)+F(3)=-15+18\ln 6+(-9+6+12\ln 4)=-18+18\ln 6+12\ln 4\approx 30{,}887$

_ 4 000 ouvrages pendant deux jours : le coût sera alors de $2F(4)=2(-16+8+15\ln 5)=30\ln 5-16\approx 32283$

L'option la plus rentable est de fabriquer 5000 ouvrages le 1er jour puis 3000 le second : le coût sera alors de 32283 €.