Terminale ES
Correction du devoir n°17 (Dm)

Exercice 1

Déterminer, en justifiant, les primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle D donné :

1. $f(x) = -3x^4 - \dfrac{1}{x^2}$; D = $]0\,;+\infty]$.

$$\boxed{F(x) = -\frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{x} + k, k \in R.}$$

2. $f(x) = (x-3)^3$; D = R

$f(x) = u'u^3$ avec $u(x) = (x-3)$

$$\boxed{F(x) = \frac{u^4}{4} + k = \frac{1}{4}(x-3)^4 + k}$$

3. $f(x) = \dfrac{-5}{(2-3x)^2}$; D = $[1\,;+\infty]$

$f(x) \approx -\dfrac{u'}{u^2}$; $f(x) = \dfrac{-5}{3} \times \dfrac{3}{(2-3x)^2}$

$$\boxed{F(x) = -\frac{5}{3} \times \frac{1}{u} + k = \frac{-5}{3(2-3x)} + k}$$

4. $f(x) = \dfrac{2}{5x-1}$; D = $\left]\dfrac{1}{5}\,;+\infty\right[$

$f(x) \approx \dfrac{u'}{u}$; $f(x) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{5}{5x-1}$ avec $5x-1 > 0$ sur D = $\left]\dfrac{1}{5}\,;+\infty\right[$

$$\boxed{F(x) = \frac{2}{5} \times \ln u + k = \frac{2}{5}\ln(5x-1) + k}$$

5. $f(x) = 2(5-2x)^4 - \dfrac{11}{2-x}$; D = $]2\,;+\infty[$

$f(x) \approx u'u^n + \dfrac{u'}{u}$;

$f(x) = -\left[-2(5-2x)^4\right] + 11 \times \dfrac{1}{x-2}$ avec x - 2 > 0 sur D = $]2\,;+\infty[$

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{5}(5-2x)^5 + 11\ln(x-2) + k}$$

6. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; D = $]0\,;+\infty[$

$f(x) \approx u'u$ avec $u(x) = \ln x$

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + k}$$

7. $f(x) = 3e^{-2x}$; D = R

$f(x) \approx u'e^{u}$; $f(x) = -\frac{3}{2} \times \left(-2e^{-2x}\right)$

$\boxed{F(x) = -\frac{3}{2}e^{-2x} + k}$

8. $f(x) = e^{-x} - \frac{1}{x}$; D = $\left]0\,;+\infty\right[$

$\boxed{F(x) = -e^{-x} - \ln x + k}$

9. $f(x) = \frac{5x}{\left(x^2 - 1\right)^2}$; D = $\left]1\,;+\infty\right[$

$f(x) \approx -\frac{u'}{u^2}$; $f(x) = -\frac{5}{2} \times \frac{-2x}{\left(x^2 - 1\right)^2}$

$\boxed{F(x) = -\frac{5}{2} \times \frac{1}{x^2 - 1} + k}$

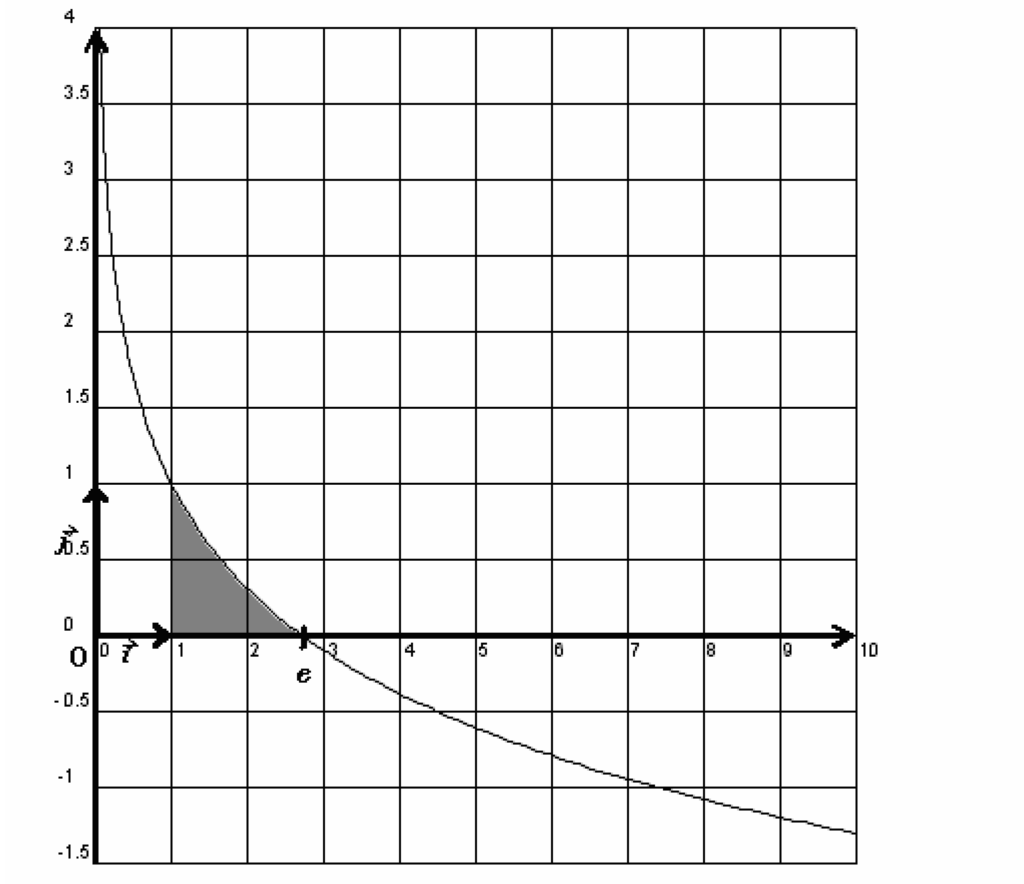
10. $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

$f(x) = \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^x + 1 > 0$ sur R

$F(x) = \ln(e^x + 1) + k$

Exercice 2

La figure ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 1 - \ln x$.



1- Tableau de signes de la fonction f (déterminé par la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses)

x	0		e		+∞
1-lnx		+	0	−	

2- Variations d'une fonction F dont f est la dérivée (F' = f).

F sera une primitive de f donc les variations de F dépendent du signe de f.

x	0		e		+∞
f(x)		+	0	−	
F(x)		↗	F(e)	↘	

3- L'une des deux fonctions représentées ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction dont f est la dérivée.

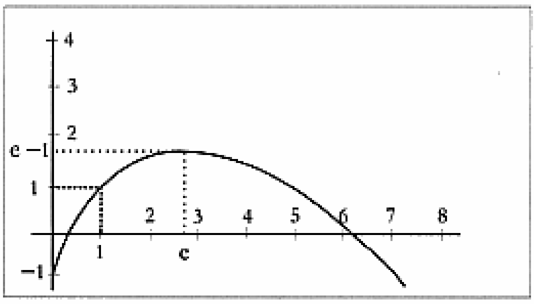


Figure 1

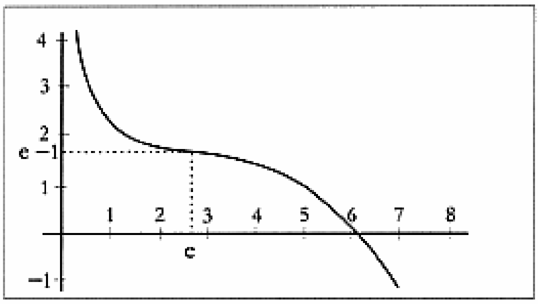


Figure 2

Sur la figure 2, la fonction est strictement décroissante sur $\left]0\,;+\infty\right[$. Ce ne peut donc pas être la représentation de F.

4- Aire coloriée = $\int_1^e f(x)dx$ u.a

Or $\int_1^e f(x)dx = F(e) - F(1) = (e-1) - 1$ par lecture sur la figure 1.

Aire coloriée = e-2 u.a = 2^e-4 cm².

5- Equation de la tangente à la courbe représentative de la fonction F au point d'abscisse 1 :

$y = F'(1)(x-1) + F(1)$

$y = f(1)(x-1) + F(1)$

$Or\ f(1) = 1$ et $\mathrm{F}(1) = 1$

D'où $y = x$

La droite (T) passe bien par O(0 ; 0).