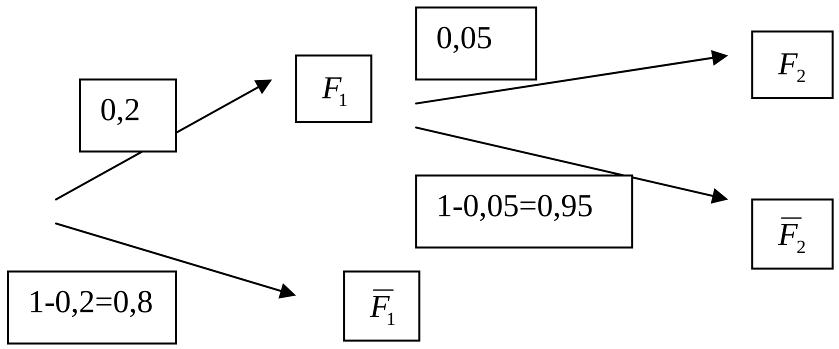
Terminale ES
Correction du devoir n°18 (Dm)

Exercice 1 (obligatoire)

1. Construction de l'arbre pondéré

1er signal 2e signal



On note $\overline{F_1}$ et $\overline{F_2}$ les événements contraires des événements F_1 et F_2 ;

On a donc p($\overline{F_1}$) = 1 -p(F_1) = 1 - 0,2 = 0,8 .

D'après le texte p $_{F_1}$ (F_2) = 0,05 donc p $_{F_1}$ ($\overline{F_2}$) = 1 - p $_{F_1}$ (F_2 = 0,95.

2. Soit A l'événement : « au cours d'une épreuve, il y a exactement un faux départ ».

L'événement A est l'événement $F_1 \cap \overline{F_2}$, dont la probabilité est :

p(A) = $p(F_1) \times p_{F_1}(\overline{F_2})$ = 0,2 × 0,95

p(A)=0,19.

La probabilité qu'il y ait exactement un faux départ est 0,19.

3. Loi de probabilité du nombre de faux départs lors d'une épreuve

Lors d'une épreuve, il peut y avoir soit 0 soit 1 soit 2 faux départs.

Soit N le nombre de faux départs possibles, la probabilité qu'il y ait zéro faux départ est :

p(N=0)= $p(\overline{F_1})$ =0,8.

La probabilité qu'il y ait exactement un faux départ a été calculée en 2. ; on a :

p(N=1)= p(A) =0,19.

La probabilité qu'il y ait deux faux départs est :

p(N=2)= p($F_1 \cap F_2$)= $p(F_1) \times p_{F_1}(F_2) = 0{,}2 \times 0{,}05 = 0{,}01$.

La loi de probabilité du nombre de faux départs est donnée par le tableau :

n	0	1	2
P(N = n)	0,8	0,19	0,01

L'événement B : « il y a au moins un faux départ » est l'événement contraire de « il y a zéro faux départ ». D'après le tableau ci-dessus on en déduit que :

P(B)= 1- 0,8 =0,2.

La probabilité qu'il y ait au moins un faux départ est égale à 0,2. Ce qui justifie l'affirmation : dans 20 % des épreuves il y a au moins un faux départ.

4. Loi binomiale

Pour chacune des séries, la probabilité qu'il n'y ait pas de faux départ est 0,8 et la probabilité qu'il y en ait au moins un est 0,2 (chaque série est un schéma de Bernouilli car deux issues possibles). Les épreuves des quatre séries étant indépendantes, le nombre de série sans faux départ suit une loi binomiale de paramètres n = 4 et p = 0,8.

L'événement C « il y trois séries exactement sans faux départ » est l'événement obtenir trois succès au cours des quatre épreuves.

II y a 4 façons d'obtenir 3 succès et un échec au cours de 4 épreuves (façons de positionner l'échec parmi les 4 épreuves).

La probabilité de C est donc : p(C)= $4 \times 0{,}8^3 \times 0{,}2$

p(C) = 0,4096 .

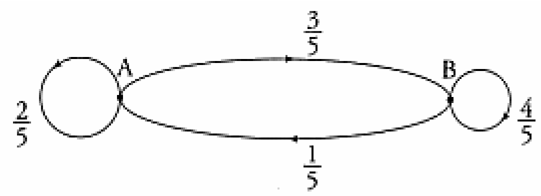
$\boxed{\text{La probabilité qu'il y ait exactement trois séries sur quatre sans faux départ est 0,4096.}}$

__Exercice 1 (spécialité)__

1. Représentation du graphe G et de sa matrice

Le graphe G est un graphe probabiliste à deux états notés A et B.

D'après les indications du texte on obtient :



On sait que la somme des poids des arêtes issues d'un même sommet est égale à 1. Si A_n (respectivement B_n) sont les événements « lors de la *n*-ième compétition, l'étudiant(e) a réalisé un score strictement inférieur à 25 secondes (respectivement supérieur ou égal à 25 secondes) on a d'après le texte :

$p_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{2}{5}$ donc $p_{A_n}\left(B_{n+1}\right) = \frac{3}{5}$

$p_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{5}$ donc $p_{B_n}\left(B_{n+1}\right) = \frac{4}{5}$

La matrice de transition est alors :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

2. a. Jamalia se présente à sa première compétition universitaire. D'après le texte, lors de la première compétition, le score d'une étudiante est toujours supérieur à 25 secondes donc la probabilité que Jamalia réalise, lors de sa première compétition, un score strictement inférieur à 25 secondes est nulle :

$a_1 = 0$ et donc $b_1 = 1$.

b. Calcul de a_3

En utilisant la matrice M de transition, on obtient successivement :

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \end{pmatrix} = (0 \quad 1)\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \end{pmatrix} = (\frac{1}{5} \quad \frac{4}{5})\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{25} & \frac{19}{25} \end{pmatrix}$$

La probabilité a_3 que Jamalia réalise un score strictement intérieur à 25 secondes aux 200 mètres lors de sa troisième compétition est $\frac{6}{25}$ soit 0,24.

$\boxed{a_3 = \frac{6}{25} = 0{,}24}$

3. Détermination de l'état stable du graphe

La matrice M de transition ne comporte pas de zéro, donc l'état probabiliste $P_n = (a_n \quad b_n)$ converge vers un état P indépendant de l'état initial

$P_1 = (0 \quad 1)$. P est l'unique solution de $P = P \times M$.

Soit P = (x y) on a $x + y = 1$ et $\begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y = x \\ \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}y = y \end{cases}$

Le système précédent se ramène à une équation $3x - y = 0$ et donc les nombres x et y sont solutions du système : $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$

D'où en additionnant membre à membre : 4x = 1 .

Donc $x = \frac{1}{4}$ et $y = 3x = \frac{3}{4}$

L'état stable du graphe G est représenté par la matrice ligne $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

4. Julien a de nombreuses compétitions universitaires dans les jambes donc le nombre n peut être considéré comme grand.

On vient de trouver l'état stable du graphe G, on en déduit que la probabilité a_n que Julien réalise un score strictement inférieur à 25 secondes est : $\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{4}$

Donc si n est assez grand, la probabilité a_n que Julien réalise un score strictement inférieur à 25 secondes est voisine de $\frac{1}{4}$. $\boxed{\text{Il a donc environ une chance sur quatre de réaliser le score A}}$.

Exercice 2

Partie A

Soit f la fonction définie sur I= [0 ; 5] par $f(x) = 9x - 15 - e^{2-0,2x}$.

1. Calcul de $f'(x)$

Pour tout réel x de I, $f'(x) = 9 - (-0,2e^{2-0,2x}) = 9 + 0,2e^{2-0,2x}$.

Signe de $f'(x)$ sur I

Pour tout réel x de I, $e^{2-0,2x}$ est un réel strictement positif, et donc $f'(x)$ est strictement positif.

La fonction f est donc strictement croissante sur I.

x	0	5
f'(x)	+	
f(x)	-15-e² ↗	30-e

$f(0) = -15 - e^2 \approx$ -22,39 ; $f(5) = 30 - e \approx 27,28$

2. Résolution approchée de $f(x) = 0$

Sur l'intervalle [0 ; 5], la fonction f est continue strictement croissante.

Le nombre 0 appartient à l'intervalle [f(0); f(5)] donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule α dans l'intervalle [0 ; 5]. (Théorème de la valeur intermédiaire)

A l'aide de la calculatrice, on obtient $f(2,19) \approx -0,058$ et $f(2,20) \approx 0,041$. La fonction f étant strictement croissante sur [0 ; 5], on en déduit que :

$$2,19 < \alpha < 2,20.$$

3. Calcul de la valeur moyenne de f sur I.

Calculons une primitive de f sur [0 ; 5].

On a pour tout réel x de I, $f(x) = 9x - 15 + [-0,2e^{2-0,2x} \times \frac{1}{0,2}] = 9x - 15 + \frac{1}{0,2}u'e^u$.

donc $F(x) = \frac{9}{2}x^2 - 15x + 5e^{2-0,2x}$.

$$\int_0^5 f(x)dx = F(5) - F(0) = \frac{225}{2} - 75 + 5e - 5e^2 = \frac{75}{2} + 5e - 5e^2$$

La valeur moyenne de f sur I est M = $\frac{1}{5}\int_0^5 f(x)dx = \frac{15}{2} + e - e^2 \approx 2,829$

Partie B

1. Intervalle J

x désigne le nombre d'objets exprimé en centaines. Sachant que l'entreprise ne peut fabriquer plus de 500 appareils, on a : $0 \leq x \leq 5$

$\boxed{\text{L'intervalle J auquel appartient } x \text{ est J = [0 ; 5].}}$

2. a. Valeur de la recette R

L'entreprise fabrique x centaines d'objets. Elle en vend 90 % soit 0,9 x centaines.

Chaque appareil est vendu 200 €, donc la recette est :

R= $0{,}9x \times 100(nbre\, bjets) \times 0{,}2(recette \text{ par objet}) = 18x$

$\boxed{\text{La recette R est égale à 18 milliers d'euros.}}$

b. Calcul du bénéfice

Le bénéfice s'obtient en calculant la différence R - C.

Pour x centaines d'objets on a :

$B(x) = (18x) - \left(9x + 15 + e^{2-0{,}2x}\right)$

Le bénéfice, en milliers d'euros, pour x centaines d'appareils fabriqués est

$\boxed{\text{B(x)= } 9x - 15 - e^{2-0{,}2x} = f(x)}$.

3. a. Nombre minimum d'appareils que l'usine doit fabriquer pour faire un bénéfice.

L'usine fait un bénéfice lorsque B(x) est strictement positif.

On a étudié dans la partie A la fonction f égale au bénéfice.

f est strictement croissante sur [0 ; 5] et $f(\alpha)$ = 0 .

Donc f est strictement positive pour x > α , où $\alpha \approx 2{,}2$.

$\boxed{\text{L'entreprise fera un bénéfice si elle fabrique au moins 220 appareils.}}$

b. Valeur moyenne du bénéfice pour les 500 premiers appareils fabriqués

La valeur moyenne du bénéfice pour les 500 premiers appareils fabriqués est égale à la valeur moyenne M de f calculée au A.

$\boxed{\text{Cette valeur moyenne est 2,829 milliers d'euros soit 2 829 euros.}}$

Exercice 3

1. Tableau des valeurs x_i et y_i

On convertit en euros les trois premiers prix.

Année x_i	1980	1985	1992	2000	2003
Prix de vente y_i en euros	25916	36588	48784	60980	69000

2. Equation de la droite d'ajustement linéaire

La calculatrice donne la valeur des coefficients a et b de l'équation $y = ax + b$ de la droite d'ajustement linéaire obtenue par la méthode des moindres carrés :

$\boxed{y = \text{l } 798{,}23x\text{-}3\ 533\ 826{,}15 \text{ .}}$

En utilisant cette équation on obtient une valeur estimée du prix de revente en 2005 :

y =1 798,23$\times$2005-3 533 826,15=71 625.

$\boxed{\text{Si l'évolution se poursuit, le prix de revente d'une maison sera en 2005 de 71 625 euros.}}$

2. Soit t % le taux annuel moyen d'augmentation du prix de vente entre 1980 et 1985.

Tous les ans, le prix de vente est alors multiplié par $1+\dfrac{t}{100}$.

Donc en 1985, le prix de vente sera de $170000\times\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^5$.

$$170000\times\left(1+\frac{t}{100}\right)^5 = 240000 \Leftrightarrow \left(1+\frac{t}{100}\right)^5 = \frac{24}{17}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[\left(1+\frac{t}{100}\right)^5\right] = \ln\left(\frac{24}{17}\right) \Leftrightarrow 5\ln\left(1+\frac{t}{100}\right) = \ln\left(\frac{24}{17}\right) \Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{t}{100}\right) = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{24}{17}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{t}{100} = e^{\frac{1}{5}\ln(\frac{24}{17})} \Leftrightarrow t = 100\left[e^{\frac{1}{5}\ln\left(\frac{24}{17}\right)} - 1\right]$$

Une valeur approchée de t est 7,14.

4. On suppose que le taux moyen annuel d'augmentation est 7,14.
Dans ces conditions, le prix de revente en 2005 s'obtient en calculant $25916\times 1{,}0714^{25} \approx 145331$

$\boxed{\text{Le prix de revente en 2005 serait de 145 331 euros.}}$
Le résultat obtenu ci-dessus représente plus du double de celui obtenu en 2.
Sur 25 ans, entre 1980 et 2005, le taux moyen d'augmentation n'est pas égal à 7,14 % .
On peut le vérifier sur la période 1980-2003. Si le taux d'augmentation était de 7,14% , le prix de revente d'une maison serait de 126 606 euros.

<u>Exercice 4</u>
1. Détermination d'un encadrement de l'aire.
a. Les coordonnées de Q sont (2 ; 5). On pose x_Q = 2 et y_Q = 5.
Q appartient à Δ si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de Δ :

On a $\dfrac{5}{2}\times 2$ = 5 donc Q appartient à Δ.

Q appartient à Γ si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de Γ.
$f(2) = (4+1)e^{-2+2} = 5e^0 = 5$
Donc Q appartient à Γ .
Le point de Γ qui appartient à l'axe des ordonnées a pour abscisse zéro.
Calculons l'ordonnée de ce point :
$y = f(0) = (0+1)e^2 = e^2$
Le point de Γ situé sur l'axe des ordonnées est le point R de coordonnées (0 ; e^2).
b. Calcul de l'aire du triangle OPQ

Le triangle OPQ étant un triangle rectangle en P, on a : $A_1 = \dfrac{1}{2}OP\times PQ = \dfrac{1}{2}\times 5\times 2$

$\boxed{A_1 = 5 \text{ unités d'aire}}$.

• Calcul de l'aire du triangle OQR

Ce triangle a pour base OR = e^2 et pour hauteur PQ= 2.

L'aire du triangle OQR est : $A_2 = \frac{1}{2} \times e^2 \times 2$

$\boxed{A_2 = e^2 \text{ unités d'aire}}$.

On remarque sur la figure que l'aire A est comprise entre $\boxed{A_1}$ du triangle OPQ et l'aire A_2 du triangle OQR. D'où en unités d'aire $5 \leq A \leq e^2$

2. Calcul de la valeur exacte de l'aire

a. Expression à l'aide d'une intégrale

Sur l'intervalle [0 ; 2], Γ est située au-dessus de Δ . L'aire si de la partie grisée limitée par Γ, Δ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$ est, en unités d'aire, égale à :

$$\boxed{A = \int_0^2 [f(x) - \frac{5}{2}x]dx \text{ u.a}}$$

b. Soit G la fonction définie sur ℝ par :

G(x)= $\left(-x^2 - 2x - 3\right)e^{-x+2} = u$v

G est dérivable sur R et on a, pour tout réel x,

G'(x) = $\left(-2x - 2\right)e^{-x+2} + \left(-x^2 - 2x - 3\right)\left(-e^{-x+2}\right)$ ($u'v + uv'$)

G'(x)= $e^{-x+2}\left[-2x - 2 + x^2 + 2x + 3\right]$

G'(x)= $\left(x^2 + 1\right)e^{-x+2}$

G'(x) = f(x)

La fonction G définie sur ℝ est donc une primitive sur ℝ de f.

c. Calcul de A.

$$A = \int_0^2 f(x) - \frac{5}{2}xdx = \left[G(x) - \frac{5}{4}x^2\right]_0^2 = \left[G(2) - 5\right] - G(0) = \left(-4 - 4 - 3\right)e^0 - 5 - (-3e^2) = -16 + 3e^2$$

L'aire si a pour valeur $3e^2 - 16$ unités d'aire.

$\boxed{\text{Une valeur approchée arrondie au centième de } A \text{ est 6,17 unités d'aire.}}$