

Terminale ES
Correction du devoir n°19 (Dm)

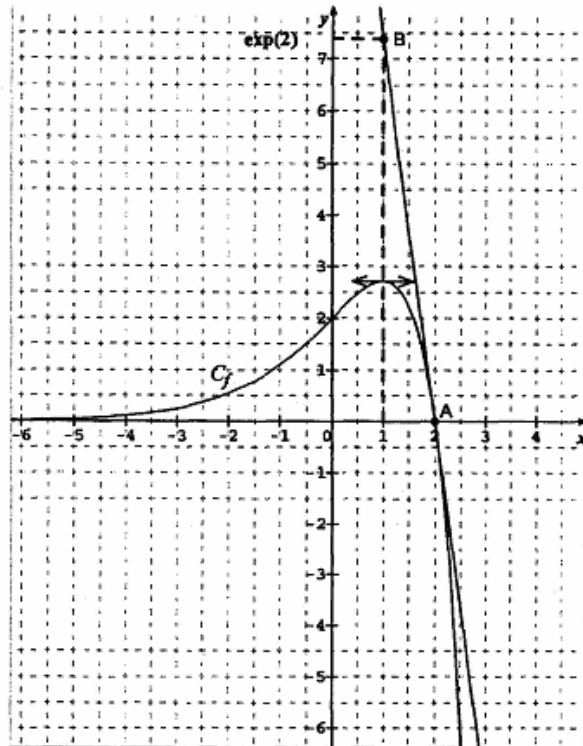
Exercice 1

La courbe ci-contre C_f est la représentation graphique d'une fonction f définie, continue et dérivable sur $]-\infty ; \frac{5}{2}]$.

On note f' sa fonction dérivée et F la primitive de f qui vérifie : $F(1) = 2e$.

On précise :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et pour tout $x < 0$, $f(x) > 0$.
- La tangente à la courbe au point A(2 ; 0) passe par le point B(1 ; e^2).
- $F(-3) = \frac{6}{e^3}$.



Affirmation 1 : Pour tout x de $]-\infty ; 2]$, $f'(x) \geq 0$.

$f'(x) \geq 0$ équivaut à la fonction f est croissante.

Or f n'est croissante que sur l'intervalle $]-\infty ; 1]$ donc **Affirmation 1 FAUSSE**

Affirmation 2 : Le nombre dérivé de f en 2 de la fonction f est égal à e^2 .

Le nombre dérivé de f en 2 est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse 2 soit le point A.

Cette tangente est strictement décroissante donc $f'(2) < 0$. (or $e^2 > 0$).

Elle passe par A(2 ; 0) et B(1 ; e^2) donc $f'(2) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{e^2 - 0}{1 - 2} = \frac{e^2}{-1} = -e^2$.

Donc **Affirmation 2 FAUSSE**

Affirmation 3 : La fonction F présente un maximum en 2.

D'après sa courbe, la fonction f est positive sur $]-\infty ; 2]$ et négative sur $\left[2 ; \frac{5}{2}\right]$ donc sa primitive

F est croissante sur $]-\infty ; 2]$ et décroissante sur $\left[2 ; \frac{5}{2}\right]$.

Donc F admettra bien un maximum en 2.

Donc **Affirmation 3 VRAIE**

Affirmation 4 : L'aire de la partie du plan comprise entre C_f , l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = -3$ et $x = 1$ est égale en u.a à $\frac{2e^4 - 6}{e^3}$.

Cette aire vaut $\int_{-3}^1 f(x)dx = F(1) - F(-3)$ u.a

Or $F(1) - F(-3) = 2e - \frac{6}{e^3} = \frac{2e^4 - 6}{e^3}$ (les valeurs de $F(1)$ et $F(-3)$ sont données dans l'énoncé)

Donc **Affirmation 4 VRAIE**

Affirmation 5 : $\int_0^2 f'(x)dx = -2$

$\int_0^2 f'(x)dx = f(2) - f(0) = 0 - 2 = -2$ car f est une primitive de f' sur $\left]-\infty; \frac{5}{2}\right]$.

Donc **Affirmation 5 VRAIE**

Affirmation 6 : La fonction $\frac{1}{f}$ est définie sur $\left]-\infty; 2\right]$.

La fonction $\frac{1}{f}$ sur tout intervalle où f ne s'annule pas. Or $f(2) = 0$. Donc $\frac{1}{f}$ ne peut pas être définie sur $\left]-\infty; 2\right]$, 2 est à excluir de l'intervalle.

Donc **Affirmation 6 FAUSSE**

Affirmation 7 : La limite de la fonction $\frac{1}{f}$ en $-\infty$ est $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$ d'après la courbe de f .

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Donc **Affirmation 7 VRAIE**

Affirmation 8 :

La courbe représentative de la fonction $\frac{1}{f}$ présente une asymptote d'équation $x = 2$.

La fonction $\frac{1}{f}$ sur tout intervalle où f ne s'annule pas. Or d'après la courbe f s'annule uniquement en 2. $f(2) = 0$.

Donc $\frac{1}{f}$ est définie sur $\left]-\infty; 2\right[\cup \left]2; \frac{5}{2}\right]$. 2 étant valeur interdite, la courbe de $\frac{1}{f}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

Donc **Affirmation 8 VRAIE**

Exercice 2

1. Ω = ensemble des 32 cartes.

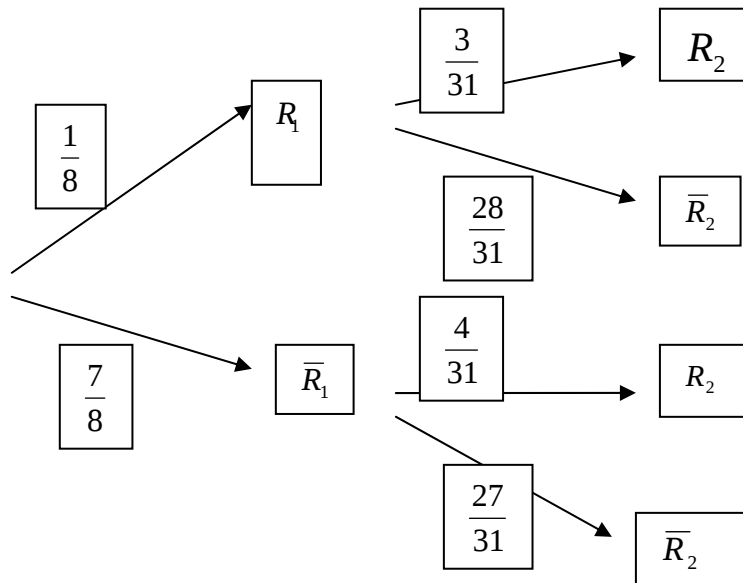
La loi est équirépartie sur Ω .

$$p(R_1) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \text{ car il y a 4 rois dans un jeu de 32.}$$

$p_{R_1}(R_2) = \frac{3}{31}$ car si on a déjà pris un roi au premier tirage sans le remettre, il reste 31 cartes dans le paquet dont 3 rois.

$p_{\bar{R}_1}(R_2) = \frac{4}{31}$ car si on a pas pris de rois au premier tirage, il reste 31 cartes dans le paquet dont 4 rois.

2.



3. A : « tirer un roi au premier et au deuxième tirage ».

$$A = R_1 \cap R_2$$

$$p(A) = p(R_1) \times p_{R_1}(R_2) = \frac{1}{8} \times \frac{3}{31} = \frac{3}{248}$$

$$p(A) \approx 0,012$$

B : « tirer un roi à un seul des deux tirages ».

$$B = (R_1 \cap \bar{R}_2) \cup (\bar{R}_1 \cap R_2)$$

$$p(B) = p(R_1 \cap \bar{R}_2) + p(\bar{R}_1 \cap R_2)$$

$$p(B) = p(R_1) \times p_{R_1}(\bar{R}_2) + p(\bar{R}_1) \times p_{\bar{R}_1}(R_2) = \frac{1}{8} \times \frac{28}{31} + \frac{7}{8} \times \frac{4}{31} = \frac{56}{248}$$

$$p(B) \approx 0,226$$

4. X = nombre de bonbons gagnés par tirage.

$$p(X=0) = p(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2) = \frac{7}{8} \times \frac{27}{31} = \frac{189}{248} \text{ soit } p(X=0) \approx 0,762.$$

$$p(X=1) = p(B)$$

$$p(X=2) = p(A)$$

Ou plus simplement, $P(X = 0) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2)$

Nombre de bonbons	0	10	20
$P(X = x_i)$	0,762	0,226	0,012

5. $E(X) = 10 \times 0,226 + 20 \times 0,012 = 2,5$

En moyenne, on gagne 2,5 bonbons par partie.

Exercice 3

a est un réel strictement positif.

Soit f et g définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(ax)$ et $g(x) = \ln a + \ln x$

Partie 1 ($a = 2$)

$f(x) = \ln(2x)$ sur $]0; +\infty[$.

f est de la forme $\ln u$ avec $u(x) = 2x$. u est définie, dérivable et strictement positive sur $]0; +\infty[$.

Donc d'après le théorème 2, la dérivée de f est de la forme $\frac{u'}{u}$.

Soit $f'(x) = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$.

$g(x) = \ln 2 + \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

$\ln 2$ est un réel donc sa dérivée est 0.

Donc $g'(x) = \frac{1}{x}$.

Partie 2 (Démonstration dans le cas général).

1. $f(x) = \ln(ax)$ sur $]0; +\infty[$.

f est de la forme $\ln u$ avec $u(x) = ax$. u est définie, dérivable et strictement positive sur $]0; +\infty[$ car $a > 0$.

Donc d'après le théorème 2, la dérivée de f est de la forme $\frac{u'}{u}$.

Soit $f'(x) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$.

$g(x) = \ln a + \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

$\ln a$ est un réel donc sa dérivée est 0.

Donc $g'(x) = \frac{1}{x}$.

2. f' et g' sont les dérivées respectives de f et g sur $]0; +\infty[$.

Donc f et g sont les primitives respectives de f' et g' sur $]0; +\infty[$.

Or sur $]0; +\infty[$, $f'(x) = g'(x)$.

D'après le théorème 1, sur un intervalle, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Donc il existe k réel tel que, pour tout x de $]0; +\infty[$, $f(x) = g(x) + k$.

3. Il existe k réel tel que, pour tout x de $]0; +\infty[$, $f(x) = \ln(ax) = g(x) + k = \ln a + \ln x + k$

Or $f(1) = \ln(a \times 1) = \ln a$

$$g(1) + k = \ln a + \ln 1 + k = \ln a + k$$

$$f(1) = g(1) + k \Leftrightarrow \ln a = \ln a + k \Leftrightarrow k = 0$$

4. On en déduit que pour tout x de $]0; +\infty[$, $f(x) = g(x)$

Ce qui équivaut à $\ln(ax) = \ln a + \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

Pour $x = b$ réel strictement positif, on a $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Exercice 4

Partie 1

Soient f et g définies sur $[0; 9]$ par $f(x) = \frac{10}{1+x} - 1$ et $g(x) = \frac{x}{2}$.

1.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{10}{1+x} - 1 = \frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{2(1+x)} - \frac{2(1+x)}{2(1+x)} - \frac{x(x+1)}{2(x+1)} = 0 \quad (\text{On passe tout du même côté et on met sur le même dénominateur})$$

$$\Leftrightarrow \frac{20 - 2 - 2x - x^2 - x}{2(1+x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 - 3x + 18}{2 + 2x} = 0$$

Une fraction est nulle si et seulement si son numérateur est nul.

$$\Delta = 9 - 4 \times (-1) \times 18 = 81 = 9^2$$

$$x_1 = \frac{3-9}{-2} = 3$$

$$x_2 = \frac{3+9}{-2} = -6 \text{ impossible car } < 0$$

Donc sur $[0; 9]$, $f(x) = g(x)$ pour $\boxed{x=3}$.

2. Calcul de $I = \int_3^9 f(x) dx$.

Pour calculer l'intégrale, il faut une primitive de f .

$$f(x) = \frac{10}{1+x} - 1 = 10 \times \frac{1}{1+x} - 1 = 10 \times \frac{u'}{u} - 1 \text{ avec } u(x) = x+1 > 0 \text{ sur } [0; 9].$$

Donc $F(x) = 10 \ln u - x = 10 \ln(x+1) - x$.

$$I = \int_3^9 f(x) dx = F(9) - F(3) = [10 \ln(10) - 9] - [10 \ln(4) - 3]$$

$$\boxed{I = 10 \ln(10) - 10 \ln(4) - 6}$$

Partie 2

1. a. Si le prix de vente est de 40 €, alors $x = 4$. $f(4) = \frac{10}{5} - 1 = 1$

Si le prix de vente est de 40 €, les consommateurs achèteront 100 boîtes.

b. Le prix d'équilibre est la solution de l'équation $f(x) = g(x)$ soit $x = 3$.

Donc le prix d'équilibre est de 30 €.

$$g(3) = 1,5$$

Donc les consommateurs achèteront 150 boîtes.

2. a. Aire du triangle OAE = $\frac{OA \times AE}{2}$ car le triangle est rectangle en A.

$$\text{Aire du triangle OAE} = \frac{3 \times 1,5}{2} = 2,25.$$

Le surplus des producteurs en cas de vente au prix d'équilibre est de 2250 €.

b. Surplus des consommateurs = $\int_3^9 f(x)dx$ milliers d'euros.

$$10\ln(10) - 10\ln(4) - 6 \approx 3,163$$

Le surplus des consommateurs en cas de vente au prix d'équilibre est de 3163 €.