Terminale ES
Correction du devoir n°20 (Ds)

Exercice 1

1.

H : « le candidat choisit au hasard la réponse à la première question ».
E : « le candidat répond correctement à la première question ».

a. p(H)=$\frac{1}{2}$ car le candidat a une chance sur 2 de ne pas connaître la réponse et donc de répondre au hasard.

b. $p_H(E)=\frac{1}{3}$ car il y a trois réponses possibles dont une exacte.

En déduire p($E\cap$ H) = $p(H)\times p_H(E)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

c. p(E) $= p(E\cap H)+p\left(E\cap\overline{H}\right)$

Or $p(\overline{H})=\frac{1}{2}$; $p_{\overline{H}}(E)=1$ car si le candidat ne répond pas au hasard, c'est qu'il connaît la réponse ; d'où $p\left(E\cap\overline{H}\right)=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$.

Par suite p(E)$=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{4}{6}$.

$\boxed{\text{p}(E)=\frac{2}{3}}$.

d. On cherche $p_E(H)=\dfrac{p\left(E\cap H\right)}{p(E)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{6}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{4}$.

2. Les quatre questions sont indépendantes.

a. Il s'agit donc d'un schéma de Bernouilli (car 2 issues : répondre correctement ou non) répété 4 fois de façon indépendante. On appelle succès l'événement « répondre correctement à la question » dont la probabilité est $\frac{2}{3}$.

La variable aléatoire X égale au nombre de réponses exactes à l'issue des quatre questions suit une loi binomiale de paramètres n = 4 et p= $\frac{2}{3}$.

b. p(« le candidat répond correctement aux quatre questions »)= $\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$5

c. p(« le candidat donne au moins une bonne réponse »)= 1-$\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{80}{81}$

d. p(« le candidat donne exactement deux bonnes réponses »)= $6\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{24}{81}$

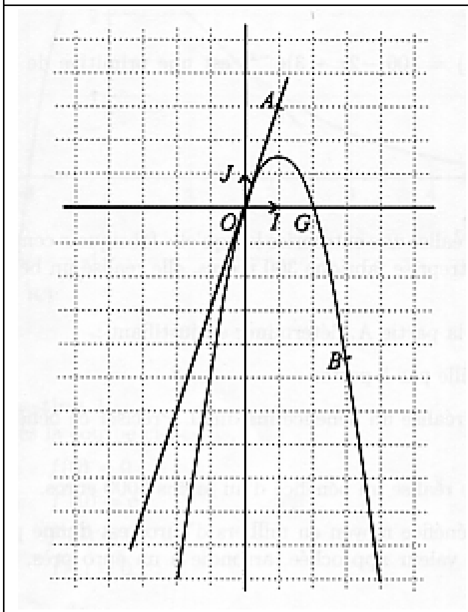
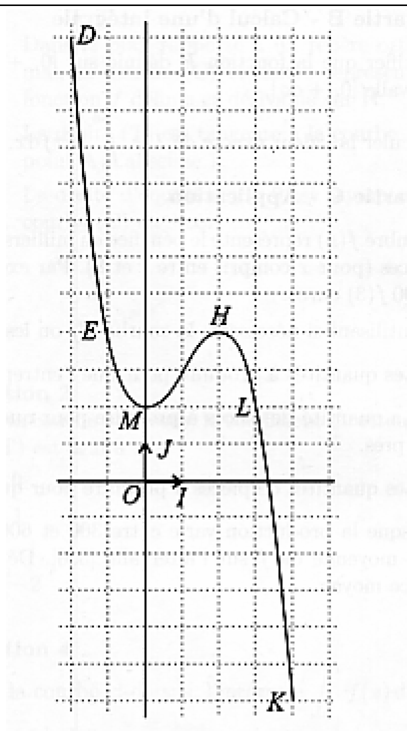
(le « 6 » correspond aux 6 façons de ranger les deux succès parmi les 4 réponses : SSEE , SESE , SEES, ESSE, ESES, EESS)

Exercice 2

Partie A (Affirmations 1 à 8)

Soient f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [-2 ; 4] et F une primitive de f sur l'intervalle [-2 ; 4].

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

La courbe (C) ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f dans le plan (P).	La courbe (Γ) ci-dessous est la courbe représentative de la fonction F dans le plan (P).
 On précise que les points B (3 ; - 4,5) O(0 ; 0) et G (2 ; 0) sont des points de le courbe (C) et que la droite (OA) est tangente en O à la courbe (C) où A (1 ; 3).	 On précise que les points D (-2 ; 12) ; E(-l ; 4); M(0 ; 2); H(2 ; 4); K(4 ; -6); L (3 ; 2) sont des points de la courbe (Γ).

1- La courbe (C) est la courbe représentative de la fonction dérivée de la fonction F : **VRAIE**

F est la primitive de f donc f est la dérivée de F.

2- $f'(0) = -3$. **FAUX**

$f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à (C) en O, or cette tangente est la droite (OA) de coefficient directeur 3.

3- F'(2) = 0. **VRAIE**

$F'(2) = f(2) = 0$ par lecture graphique sur la courbe (C).

4- La fonction f est négative ou nulle sur l'intervalle [1 ; 4]. **FAUX**

La courbe (C) n'est pas située en dessous de l'axe des abscisses sur [1 ; 4].

5- La fonction f est positive ou nulle sur l'intervalle [0 ; 2]. **VRAIE**

La courbe (C) est bien située au dessus ou sur l'axe des abscisses sur [0 ; 2].

6- Le coefficient directeur de la tangente en L à la courbe (Γ) est -4. **FAUX**

L est le point d'abscisse 3 de la courbe (Γ) donc la tangente en L a pour coefficient directeur $F'(3) = f(3) = -4{,}5$ par lecture graphique.

7- On note A l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan (P) délimitée par l'axe des abscisses, la courbe (C), l'axe des ordonnées et la droite d'équation x = 2. On a A = 1. **FAUX**

$$A = \int_0^2 f(x)dx = F(2) - F(0) = 4 - 2 = 2$$

8- $\int_2^4 f(x)dx = -11$ **FAUX**

$$\int_2^4 f(x)dx = F(4) - F(2) = -6 - 4 = -10$$

Partie B(Choix multiples 9 à 11)

9. Soient A et B deux événements. Il est possible que :

a. p(A) = 0,8 et p(B) = 0,4 et p(A $\cap$ B) = 0,1.

b. p(A) = 0,7 et p(B) = 0,5 et p(A $\cap$ B) = 0,2.

c. p(A) =0,8 et p(B)=0,9 et p(A $\cap$ B)= -0,l.

Réponse b.

Dans c. on a p(A $\cap$ B)= -0,l or une probabilité ne peut pas être négative.

Dans a. on sait que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,8 + 0,4 - 0,1 = 1,1$ dans ce cas. Or une probabilité ne peut être supérieure à 1.

10- Soient A et B deux événements indépendants tels que p(A) =0,3 et p(B)= 0,2. Alors:

a. p(A $\cap$ B) =0,5.

b. Les informations précédentes ne suffisent pas à calculer p(A $\cap$ B)

c. p(A $\cap$ B) =0,06.

Réponse c.

Si A et B sont indépendants alors $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0,3 \times 0,2 = 0,06$.

11- Si A et B sont deux événements incompatibles mais non impossibles, alors A et B sont indépendants.

a. Cette affirmation est vraie.

b. Cette affirmation est fausse.

c. On ne peut pas savoir.

Réponse b.

A et B incompatibles signifie $p(A \cap B) = 0$.

A et B non impossibles signifie $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ donc $p(A) \times p(B) \neq 0$ donc $p(A) \times p(B) \neq p(A \cap B)$.

A et B ne peuvent donc pas être indépendants.

Exercice 3

Soit f la fonction définie pour tout x élément de $\mathbb{R}$ par $f(x) = 30e^{-5x}$.

Soit g la fonction définie pour tout x élément de $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{5x} + 1$.

1. $f'(x) = 30 \times (-5)e^{-5x} = -150e^{-5x}$.Pour tout x de $\mathbb{R}$ $e^{-5x} > 0$ donc $f'(x) = -150e^{-5x} < 0$.

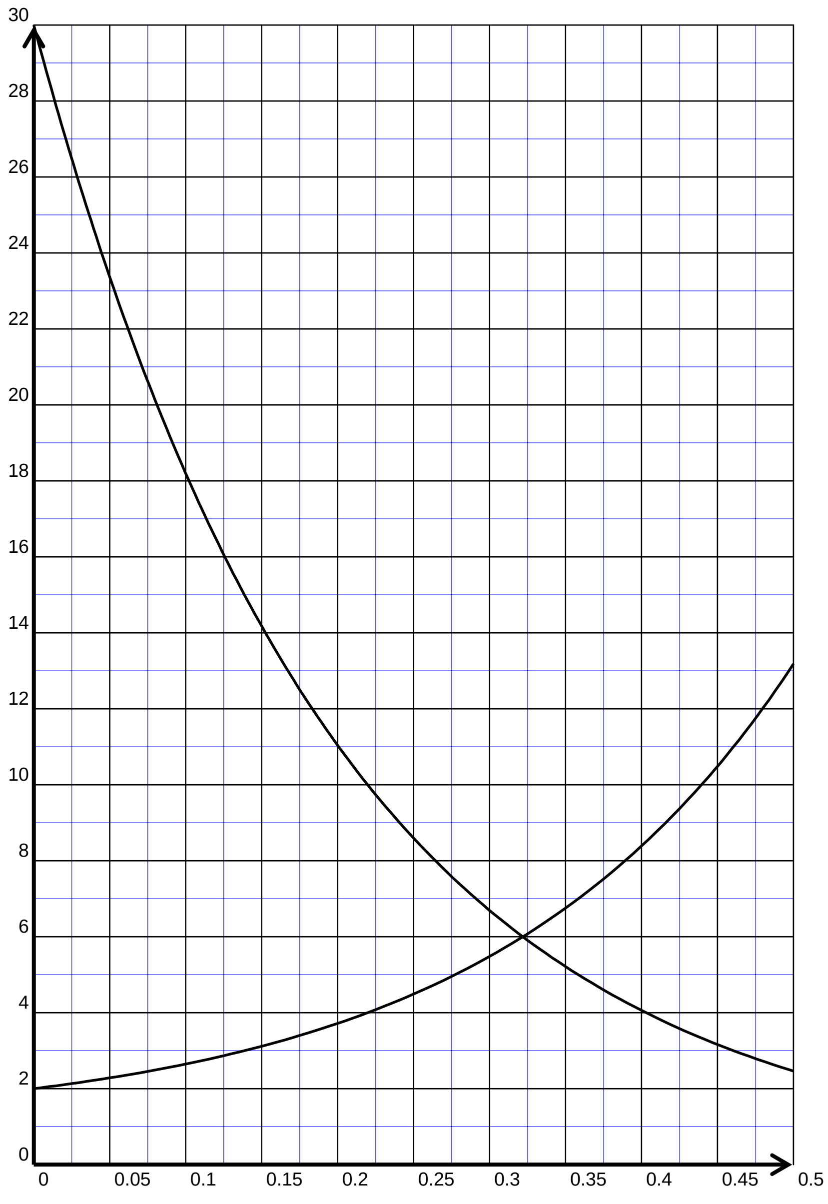
$\boxed{f \text{ est bien strictement décroissante sur } \mathbb{R}}$

2. $g'(x) = 5e^{5x}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$ $e^{5x} > 0$ donc $g'(x) = 5e^{5x} > 0$.

$\boxed{g \text{ est bien strictement croissante sur } \mathbb{R}}$

3. Voir ci-dessus.



4. Le but de cette question est de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $f(x) = g(x)$.

a. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^{5x} + 1 = 30e^{-5x} \Leftrightarrow e^{5x} + 1 - 30e^{-5x} = 0$.

On multiplie l’équation par e^{5x}

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow (e^{5x})^2+e^{5x}-30=0$ car $e^{5x}\times e^{-5x}=e^0=1$.

b. $X^2+X-30=0$:

$\Delta=121=11^2$

$X_1=\dfrac{-1-11}{2}=-6$

$X_2=\dfrac{-1+11}{2}=5$

c. . $f(x)=g(x) \Leftrightarrow (e^{5x})^2+e^{5x}-30=0$

On pose $X=e^{5x}$ On obtient $X^2+X-30=0$ dont les solutions sont -6 et 5.

On résout :

$e^{5x}=-6$ impossible car pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{5x}>0$.

$e^{5x}=5 \Leftrightarrow \ln(e^{5x})=\ln 5 \Leftrightarrow 5x=\ln 5 \Leftrightarrow x=\dfrac{\ln 5}{5}$

Donc $\boxed{f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=\dfrac{\ln 5}{5}}$.

5. Il faut découper en deux intégrales car il y a deux courbes différentes.

$A=\int_0^{\frac{\ln 5}{5}} g(x)dx+\int_{\frac{\ln 5}{5}}^{0,5} f(x)dx$ u.a

Partie de courbe Croissante

Partie de courbe décroissante

$$\int_0^{\frac{\ln 5}{5}} g(x)dx=\int_0^{\frac{\ln 5}{5}} e^{5x}+1\,dx=\left[\frac{1}{5}e^{5x}+x\right]_0^{\frac{\ln 5}{5}}=\left(\frac{1}{5}e^{5\times\frac{\ln 5}{5}}+\frac{\ln 5}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}e^0\right)=\frac{1}{5}e^{\ln 5}+\frac{\ln 5}{5}-\frac{1}{5}=\frac{5}{5}+\frac{\ln 5}{5}-\frac{1}{5}$$

$$\int_0^{\frac{\ln 5}{5}} g(x)dx=\frac{4+\ln 5}{5}$$

$$\int_{\frac{\ln 5}{5}}^{0,5} f(x)dx=\int_{\frac{\ln 5}{5}}^{0,5}30e^{-5x}dx=\left[30\times\left(\frac{-1}{5}\right)e^{-5x}\right]_{\frac{\ln 5}{5}}^{0,5}=-6e^{-5\times 0,5}+6e^{-5\times\frac{\ln 5}{5}}=-6e^{-2,5}+6e^{-\ln 5}$$

$$=-6e^{-2,5}+6e^{\ln\frac{1}{5}}=-6e^{-2,5}+\frac{6}{5}$$

D'où $A=\dfrac{10+\ln 5}{5}-6e^{-2,5}$ u.a

Or 1 u.a = 10 cm² car 20 cm = 1 sur l'axe des abscisses et 0,5 cm = 1 en ordonnée.

$A=20+2\ln 5-60e^{-2,5}$ cm².

$\boxed{A\approx 18,2\ \text{cm}^2}$