Correction du devoir n°3 TES1

Exercice 1

1. $f'(1) =$ coefficient directeur de la tangente à Cf au point d'abscisse 1 (soit la droite (AB)).

Coefficient directeur de (AB) = $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{5-0}{1-(-1)} = \dfrac{5}{2}$.

Donc $\boxed{f'(1) = 2{,}5}$.

2. Le signe de la dérivée $f'(x)$ donne le sens de variation de *f*.
Inversement donc le sens de variation de *f* donne le signe de la dérivée *f'*.
Sur $[0\,;1{,}25]$ *f* est croissante donc $f'(x) \geq 0$.
Sur $[1{,}25\,;6]$ *f* est décroissante donc $f'(x) \leq 0$.
Donc la courbe de *f'* est au dessus de l'axe des abscisses sur $[0\,;1{,}25]$ et en dessous de l'axe des abscisses sur $[1{,}25\,;6]$.
Cet argument permet d'éliminer la courbe C_3.
De plus, d'après la question 1, on a $f'(1) = 2{,}5$ donc la courbe de *f'* passe par le point $(1\,;2{,}5)$: on en déduit $\boxed{\text{la bonne courbe est } C_1}$

Exercice 2

1. Résoudre l'équation (E) revient à déterminer le nombre de points d'intersection de la droite d'équation $y = x - 2$ et de l'hyperbole $y = \dfrac{1}{x}$

Sur $]0\,;+\infty[$, la droite coupe une seule fois l'hyperbole.
Donc au vu du graphique, l'équation (E) admet une unique solution sur $]0\,;+\infty[$.

2. Soit *g* définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x - 2 - \dfrac{1}{x}$.

a. $\lim\limits_{x\to 0} x - 2 = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc par soustraction, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = -\infty}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x - 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc par soustraction, $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty}$

b. La fonction $x \to x - 2$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \to 1$.
La fonction $x \to \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \to -\dfrac{1}{x^2}$.

Donc $g'(x) = 1 - \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 1 + \dfrac{1}{x^2}$ soit $\boxed{g'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}}$.
L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution car $\Delta = -4 < 0$.

x	0	$+\infty$
x^2+1		$+$
x^2	0	$+$
(x^2+1)/x^2	$\|\|$	$+$

Donc $g'(x) > 0$ sur $]0\,;+\infty[$. On en déduit que $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur }]0\,;+\infty[}$.

c. On dresse le tableau de variation complet de g sur $]0\,;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
x-2-(1/x)	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ donc continue sur $]0\,;+\infty[$;
pour tout x dans $]0\,;+\infty[$, $g(x) \in]-\infty\,;+\infty[= \mathbb{R}$;
0 appartient à $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;+\infty[$.
A la calculatrice,
$g(2) = -0.5$ et $g(3) \approx 0.66$ donc $2 < \alpha < 3$
$g(2.4) \approx -0.016$ et $g(2.5) = 0.1$ donc $2.4 < \alpha < 2.5$
$g(2.41) \approx -0.0049$ et $g(2.42) \approx 0.0067$ donc $2.41 < \alpha < 2.42$

3. On veut résoudre : $x - 2 = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x^2 - 2x = 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = 8$

$x_1 = \dfrac{2-\sqrt{8}}{2} = \dfrac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2} \approx -0.41 < 0$

$x_2 = 1+\sqrt{2} \approx 2.41 > 0$

Donc l'équation admet bien une unique solution sur $]0\,;+\infty[$: $\boxed{S = \{1+\sqrt{2}\}}$

Exercice 3

Soit f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3+x+3}{(1+x)^2}$.

1. f est définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

   f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x^3+x+3$ et $v(x) = (1+x)^2 = 1+2x+x^2$

   $u'(x) = 3x^2+1$ et $v'(x) = 2x+2 = 2(x+1)$

Donc $f'(x) = \dfrac{(3x^2+1)(1+x)^2 - 2(x+1)(x^3+x+3)}{\left[(1+x)^2\right]^2}$

$$f'(x)=\frac{(1+x)\left[(1+x)(3x^2+1)-2(x^3+x+3)\right]}{(1+x)^4}=\frac{3x^2+1+3x^3+x-2x^3-2x-6}{(1+x)^3}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x^3+3x^2-x-5}{(1+x)^3}}$$

2. Soit g définie sur ℝ par $g(x)=x^3+3x^2-x-5$

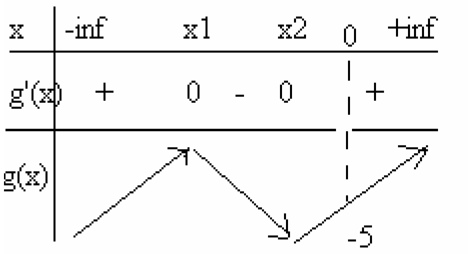
a. g est définie et dérivable sur ℝ.

$g'(x)=3x^2+6x-1$.

$\Delta=36-4\times3\times(-1)=36+12=48$

$$x_1=\frac{-6-\sqrt{48}}{6}=\frac{-6-2\sqrt{6}}{6}=-1-\frac{\sqrt{6}}{3}\approx-1.81$$

$$x_2=-1+\frac{\sqrt{6}}{3}\approx-0.18$$



b. g est dérivable donc continue sur $[0\,;+\infty[$.

Sur $[0\,;+\infty[$, g est strictement croissante.

Pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $g(x)\in[-5\,;+\infty[$.

$0\in[-5\,;+\infty[$ donc l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[0\,;+\infty[$ (théorème des valeurs intermédiaires).

$g(1)=-2<0$

$g(2)=13>0$ donc $1<\alpha<2$

$g(1.2)=-0.152<0$

$g(1.3)=0.967>0$ donc $\alpha\approx1.2$

c. D'après le tableau de variation de g, on peut en déduire le signe de g sur $[0\,;+\infty[$.

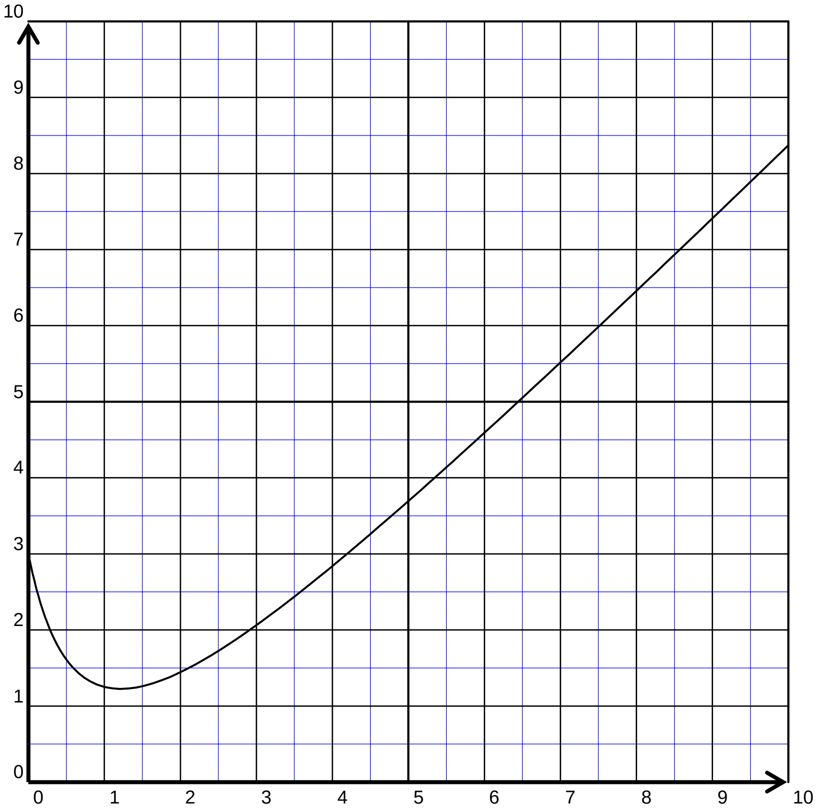
x	0		alpha		+inf
g(x)		_	0	+	

3. D'après 1. $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(1+x)^3}$.

Sur $[0\,;+\infty[$, $(1+x)^3>0$ donc f' et g ont le même signe.

x	0	alpha	+inf
g(x)	_	0	+
f(x)	↘	f(alpha)	↗

$f(\alpha) \approx f(1.2) \approx 1.22$



Exercice 4

1. $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 12x - 9 - \dfrac{1}{x^2}$

$$\boxed{F(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 9x + \frac{1}{x}}$$

2. $f(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^2} = 3 \times \dfrac{-1}{(x-1)^2} = 3 \times \left(\dfrac{-u'}{u^2}\right)$

$$\boxed{F(x) = \frac{3}{x-1}}$$

3. $f(x) = \dfrac{7}{(2x-3)^2} = -\dfrac{7}{2} \times \dfrac{-2}{(2x-3)^2} = -\dfrac{7}{2} \times \left(\dfrac{-u'}{u^2}\right)$

$$\boxed{F(x) = \frac{-7}{2(2x-3)}}$$