Terminale ES

Correction du devoir n°4 (Dm)

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{3x^2-6x+5}{(x-1)^2}$.

1. On veut étudier le signe de $f(x)$.

Pour tout x de $\mathbb{R}-\{1\}$, $(x-1)^2>0$.

$3x^2-6x+5$: $\Delta=36-4\times3\times5=36-60=-24$

$\Delta<0$ donc le trinôme n'admet pas de racines et est toujours du signe de « a » soit strictement positif.

x	-∞		1		+∞
3x^2-6x+5		+	‖	+	
(x-1)^2		+	0	+	
(3x^2-6x+5)/(x-1)^2		+	‖	+	

Donc $\boxed{f(x)>0 \text{ sur } \mathbb{R}-\{1\}}$

2. On veut écrire $f(x)$ sous la forme $a+\dfrac{b}{(x-1)^2}$.

$$a+\frac{b}{(x-1)^2}=\frac{a(x-1)^2+b}{(x-1)^2}=\frac{a(x^2-2x+1)+b}{(x-1)^2}=\frac{ax^2-2ax+a+b}{(x-1)^2}.$$

Or $f(x)=\dfrac{3x^2-6x+5}{(x-1)^2}$.

Par identification des coefficients du numérateur,

$$\begin{cases} a=3 \\ -2a=6 \\ a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$$

Donc $\boxed{f(x)=3+\dfrac{2}{(x-1)^2}}$

3. $f(x)=3+\dfrac{2}{(x-1)^2}=3+(-2)\times\dfrac{(-1)}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{-u'}{u^2}\Rightarrow\dfrac{1}{u}$

Donc toute primitive de f est de la forme $\boxed{F(x)=3x-2\times\dfrac{1}{x-1}+k, k\in\mathbb{R}}$.

4. On cherche k tel que $F(2) = 6$.

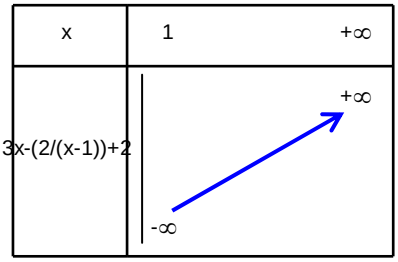
$$F(2) = 3\times 2 - \frac{2}{2-1} + k = 6 - 2 + k = 4 + k.$$
$$F(2) = 6 \Leftrightarrow 4 + k = 6 \Leftrightarrow k = 2.$$
Donc $\boxed{F(x) = 3x - \frac{2}{x-1} + 2.}$

5. F est par définition une primitive de f. Donc pour tout x de $\mathbb{R} - \{1\}$, $F'(x) = f(x)$.
La fonction f est positive sur $\mathbb{R} - \{1\}$ donc sur $]1;+\infty[$.
On en déduit que F est croissante sur $]1;+\infty[$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 3x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x-1} = 0\end{array}\right\} \text{donc } \lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty \ (+\infty - 0 + 2)$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} 3x = 3$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{2}{x-1} = +\infty \text{ donc } \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} F(x) = -\infty$$



Exercice 2
Courbe C1
Variations de $f1$:
$f1$ est décroissante sur $]-\infty;-4]$; croissante sur $[-4;-2]$ et décroissante sur $[-2;+\infty[$

Donc signe de sa dérivée :
La dérivée de $f1$ est donc négative sur $]-\infty;-4]$; positive sur $[-4;-2]$ puis négative sur $[-2;+\infty[$.

La position de la courbe C4 par rapport à l'axe des abscisses permet de conclure que la fonction $f4$ est la dérivée de $f1$.

Courbe C2
Signe de $f2$:

Donc variations de sa primitive :

Variations de $f2$:
$f2$ est décroissante sur $]-\infty;4]$ et croissante sur $[4;+\infty[$. De plus, la courbe représentative est une parabole. L'équation de la courbe est donc un trinôme.
Donc signe de sa dérivée : L'équation de la dérivée est de degré 1, la courbe est donc une droite.

La dérivée de *f*2 est négative sur $]-\infty;4]$ et positive sur $[4;+\infty[$.

La courbe de *C*5 est une droite sous l'axe des abscisses sur $]-\infty;4]$ et au dessus sur $[4;+\infty[$. Donc la fonction *f*5 est la dérivée de *f*2.

Courbe C3

La courbe C3 est une droite. Donc son équation est de degré 1. Sa dérivée serait donc une fonction constante. Or il n'y a aucune courbe qui soit une droite parallèle à l'axe des abscisses.
Par contre, la primitive de *f*3 doit donc être un trinôme. On cherche alors une parabole.
*f*3 est positive sur $]-\infty;4]$ et négative sur $[4;+\infty[$ donc sa primitive est croissante sur $]-\infty;4]$ et décroissante sur $[4;+\infty[$.
La courbe de *C*6 répond à ses critères.

Donc *f*6 est la primitive de *f*3.