Terminale ES
Correction du devoir n°6 (Ds)

Exercice 1

Tableau de la demande donné dans l'énoncé :

Demandes journalières d_i	0	1	2	3	4	5 ou plus
$p(\mathrm{D} = d_i)$	0,1	0,2	0,35	0,25	0,1	0

1.a Le fabricant fabrique 4 objets par jour.
Donc loi de probabilité du gain :

Ventes	0	1	2	3	4
Gain (en euros)	-120	-40	40	120	200
Proba	0,1	0,2	0,35	0,25	0,1

b. Espérance mathématique =
$0{,}1\times(-120)+0{,}2\times(-40)+0{,}35\times40+0{,}25\times120+0{,}1\times200=\boxed{44\text{ €}}$

2. a. Le fabricant fabrique 3 objets.
p(ne pas satisfaire la demande) = 0,1 (si la demande est de 4 objets ou plus).

b. Loi de probabilité du gain :

Ventes	0	1	2	3 ou plus
Gain	-90	-10	70	150
Proba	0,1	0,2	0,35	0,35

Espérance mathématique =
$0{,}1\times(-90)+0{,}2\times(-10)+0{,}35\times70+0{,}35\times150=\boxed{66\text{ €}}$

3. Le fabricant fabrique 2 objets.
Il a une probabilité de 0,35 de ne pas répondre à la demande

Ventes	0	1	2 ou plus
Gain	-60	20	100
Proba	0,1	0,2	0,7

Espérance mathématique : $0{,}1\times(-60)+0{,}2\times20+0{,}7\times100=\boxed{68\text{ €}}$

Le fabricant fabrique 1 objet
Il a une probabilité de 0,7 de ne pas répondre à la demande.

Ventes	0	1 ou plus
Gain	-30	50
Proba	0,1	0,9

Espérance mathématique : $0{,}1\times(-30)+0{,}9\times50=\boxed{42\text{ €}}$

4. Si le fabricant fabrique 2 objets, il peut espérer gagner en moyenne 68 € par jour, ce qui est le gain moyen maximal. C'est donc la production journalière qui lui assurera le gain le plus important à long terme.

Exercice 2

On définit la fonction f sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x - 1 - \dfrac{1}{x^2}$ et on appelle *C* sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'unités 4 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

Partie A : Etude de la fonction *f*

1. $(2x-1)' = 2$

La fonction $x \to \dfrac{1}{x^2}$ est de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = x^2$.

Donc sa dérivée est de la forme $\dfrac{-u'}{u^2}$ avec $u'(x) = 2x$.

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{-2x}{\left(x^2\right)^2} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

Donc *f* est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par $f'(x) = 2 - \left(\dfrac{-2}{x^3}\right) = 2 + \dfrac{2}{x^3}$.

Pour tout *x* dans $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{2}{x^3} > 0$ et $2 > 0$ donc $f'(x) > 0$.

On en déduit que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0\,;+\infty[}$.

2.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} 2x - 1 = -1 \\ \displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{-1}{x^2} = -\infty \end{array}\right\} \text{donc par addition, } \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$$

La droite d'équation x = 0 (axe des ordonnées) est asymptote verticale à *C*.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} 2x - 1 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x^2} = 0 \end{array}\right\} \text{donc par addition, } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty .$$

3. On veut montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à *C*.
On étudie la limite en l'infini de $f(x) - (2x-1)$.

$$f(x) - (2x-1) = -\frac{1}{x^2}.$$

D'après 2. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$

Donc $\boxed{\Delta \text{ d'équation } y = 2x - 1 \text{ est asymptote oblique à } C}$.

Position de *C* par rapport à Δ : on étudie le signe de $f(x) - (2x-1) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Or pour tout *x* de $]0\,;+\infty[$, $-\dfrac{1}{x^2} < 0$.

Donc $\boxed{C \text{ est toujours en dessous de } \Delta}$.

4.

x	0		$+\infty$
$f(x)$		$-\infty$ ↗	$+\infty$

5. Soit A le point d'abscisse 1.
$f(1) = 2 - 1 - 1 = 0$
Donc $A(1;0)$.

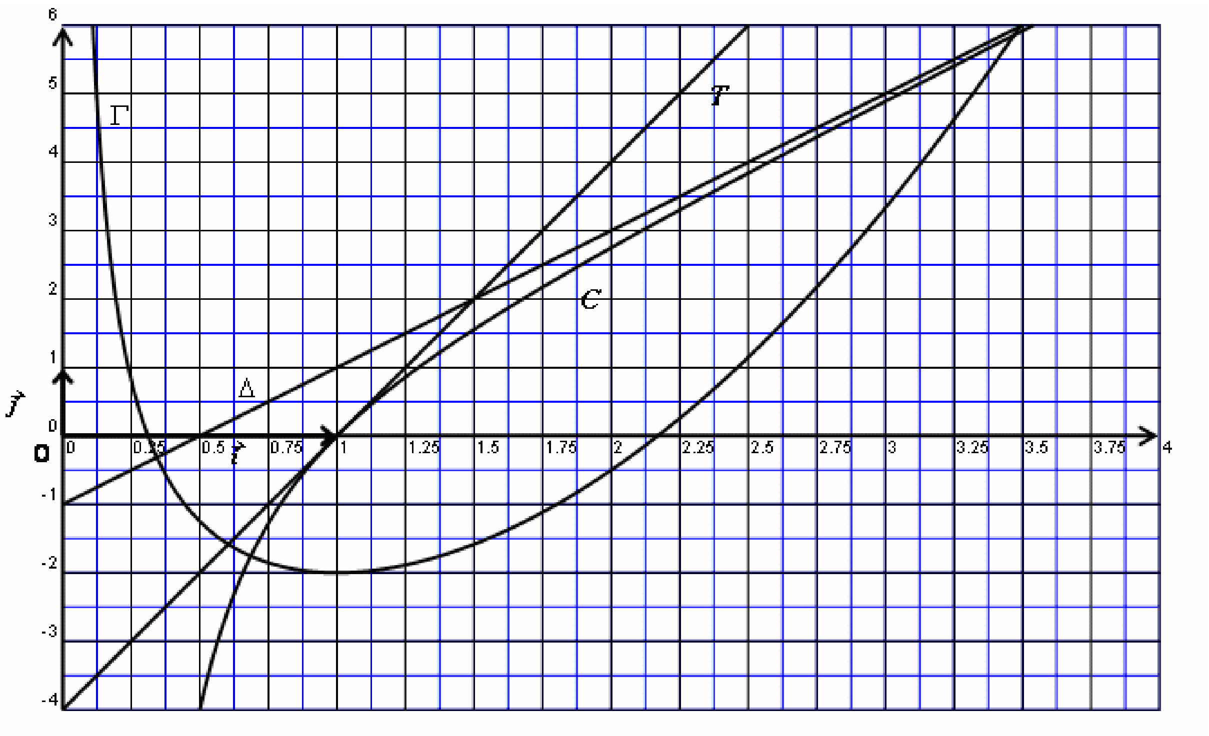
$T:\ y = f'(1)(x-1) + f(1)$
Or $f'(1) = 4$ et $f(1)=0$

$\boxed{T:\ y = 4x - 4}$

6. D'après le tableau de variation de *f* et sachant que *f*(1)=0, on en déduit le signe de *f*(x).

x	0		1		+∞
2x-1-1/x²		−	0	+	

7.



Partie B : Etude de la primitive.

1. $F(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{x} + k$.

On veut $F(1) = -2$ soit $1 - 1 + 1 + k = -2 \Rightarrow k = -2 - 1 = -3$.

D'où $\boxed{F(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{x} - 3}$

2.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} O} x^2 - x - 3 = -3 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} O} \dfrac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x \overset{>}{\to} O} F(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - x - 3 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$$

3. Pour déterminer les variations de *F*, il faut étudier le signe de sa dérivée. Or la dérivée de *F* est *f*. On a étudié le signe de *f* dans la partie A question 6.
D'où les variations de *F* :

x	0		1		+∞
f(x)		−	0	+	
x^2-x-3+(1/x)	+∞	$\searrow$	-2	$\nearrow$	+∞

4. Voir courbe partie A.

Exercice 3

1. Tableau de f :

x	-0,5		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$

2. On a une asymptote verticale d'équation $x = -0{,}5$

Et on a une asymptote oblique d'équation $y = -\frac{2}{3}x + 1$.

Pour trouver l'équation , on prend deux points de la droite : J(0 ; 1) et K(3 ; -1).
J donne tout de suite l'ordonnée à l'origine : 1.

$$a = \frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}} = \frac{-1-1}{3-0} = -\frac{2}{3}$$

3.
$f(0) = 0$

$f(1) = 2$

$f(2{,}5) = 0$

4. $f'(0) =$ coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0
La tangente passe par (0 ; 0) et (0,5 ; 2)

$$\boxed{f'(0) = \frac{2}{0{,}5} = 4}$$

$f'(1) =$ coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1
La tangente est horizontale donc $\boxed{f'(1) = 0}$

5. On cherche à identifier la primitive de *f*.
Sur $]-0{,}5\,;0]$, $f(x) \leq 0$ donc *F* est décroissante.
Sur $[0;2{,}5]$, $f(x) \geq 0$ donc *F* est croissante.
Sur $[2{,}5;+\infty[$, $f(x) \leq 0$ donc *F* est décroissante.
De plus $f(0) = f(2{,}5) = 0$ donc la courbe de *F* admet des tangentes horizontales en ces points.

$\boxed{\text{La seule courbe correspondante est } C1}$