Terminale ES
Correction du devoir n°7 (Dm)

Exercice 1

f est de la forme $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.

1. $(ax+b)' = a$

$\left(\dfrac{c}{x+1}\right)' = -\dfrac{c}{(x+1)^2}$

D'où $\boxed{f'(x) = a - \dfrac{c}{(x+1)^2}}$

2. D'après le tableau de variation, on a :

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f(-2) = -2 \\ f(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 0 \\ -2a + b - c = -2 \\ b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = 2 - c \\ -2a + b - c = -2 \end{cases}$$

On remplace les expressions de *a* et *b* en fonction de *c* dans la troisième équation ; on a plus alors qu'une équation avec une inconnue.

$$\begin{cases} a = c \\ b = 2 - c \\ -2c + 2 - c - c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = 2 - c \\ -4c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

D'où $\boxed{f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x+1}}$

3. $f(x) - (x+1) = \dfrac{1}{x+1}$

Or :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$

Donc $\boxed{\text{la droite } \Delta \text{ d'équation } y = x + 1 \text{ est asymptote oblique à C}f \text{ au voisinage de + et -}\infty.}$

4. Pour étudier la position de C*f* par rapport à Δ, on étudie le signe de $f(x) - (x+1) = \dfrac{1}{x+1}$.

x	-∞	-1	+∞
1/(x+1)	−	‖	+

Donc C*f* est en dessous de Δ sur $]-\infty\,;-1[$

C*f* est au dessus de Δ sur $]-1\,;+\infty[$

5. Voir graphique à la fin

Exercice 2

$C_M(x) = x^2 - 21x + 200 + \dfrac{500}{x}$ = coût unitaire moyen par tonne produite.

Partie A

Soit g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = 2x^3 - 21x^2 - 500$.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$

2. Pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $g'(x) = 6x^2 - 42x = 6x(x-7)$

On a deux racines 0 et 7

x	0		7		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
2x^3-21x^2-500	-500	$\searrow$	-843	$\nearrow$	$+\infty$

3. g est dérivable donc continue sur $[0\,;+\infty[$

Sur $[0\,;7]$, g est strictement décroissante et son maximum est -500 donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet aucune solution sur cet intervalle.

Sur $[7\,;+\infty[$, la fonction g est strictement croissante.

Pour tout x de $[7\,;+\infty[$, $g(x) \in [-843\,;+\infty[$.

$0 \in [-843\,;+\infty[$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[7\,;+\infty[$.

Donc au final, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0\,;+\infty[$.

$g(12) = -68 < 0$
$g(13) = 345$
donc $12 < \alpha < 13$

$g(12{,}1) \approx -31{,}49$
$g(12{,}2) \approx 6{,}056$
donc $12{,}1 < \alpha < 12{,}2$

$g(12{,}18) \approx -1{,}536$
$g(12{,}19) \approx 2{,}2548$
donc $12{,}18 < \alpha < 12{,}19$

On a $\boxed{\alpha \approx 12{,}184}$

4.

x	0		α		$+\infty$
g(x)		-	0	+	

Partie B

$C_M(x) = x^2 - 21x + 200 + \dfrac{500}{x}$.

1. $\left(x^2 - 21x + 200\right)' = 2x - 21$

$\left(\dfrac{500}{x}\right)' = \dfrac{-500}{x^2}$

Donc $C'_M(x) = 2x - 21 - \dfrac{500}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 21x^2 - 500}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

2.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 21x + 200 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{500}{x} = 0 \end{cases} \quad \text{donc } \lim_{x\to+\infty} C_M(x) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} x^2 - 21x + 200 = 200 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \dfrac{500}{x} = +\infty \end{cases} \quad \text{donc } \lim_{x\to 0} C_M(x) = +\infty$$

La droite d'équation x=0 est asymptote verticale à la courbe.

3. a.

On a $C'_M(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$. C'_M et g ont le même signe.

x	0		α		$+\infty$
$Cm'(x)$		$-$	0	$+$	
x*x-21x+200+(500/x)	$+\infty$	↘	CM(α)	↗	$+\infty$

b. $C_M(\alpha) \approx 133{,}62$ or le résultat est en centaines de francs.
Donc la valeur minimale du coût unitaire est de 13 362 Francs.

4. Voir graphique à la fin.

PARTIE C

1. Le coût total est le produit du coût unitaire par le nombre de tonnes produites.
$C(x) = xC_M(x) = x^3 - 21x^2 + 200x + 500$.

2. On note C_m le coût marginal.

a. $C_m(x) = C'_M(x) = 3x^2 - 42x + 200$

b. $C'_m(x) = 6x - 42$

x	0		7		$+\infty$
$Cm'(x)$		$-$	0	$+$	
3x*x−42x+200	$+\infty$	$\searrow$	53	$\nearrow$	$+\infty$

c. La quantité qui minimise le coût marginal est 7 tonnes. Le coût est alors de 5 300 Francs.
d. Voir graphique à la fin.

3. $C_m(x) = C_M(x) \Leftrightarrow 3x^2 - 42x + 200 = x^2 - 21x + 200 + \dfrac{500}{x}$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 21x - \dfrac{500}{x} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^3 - 21x^2 - 500}{x} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{g(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$

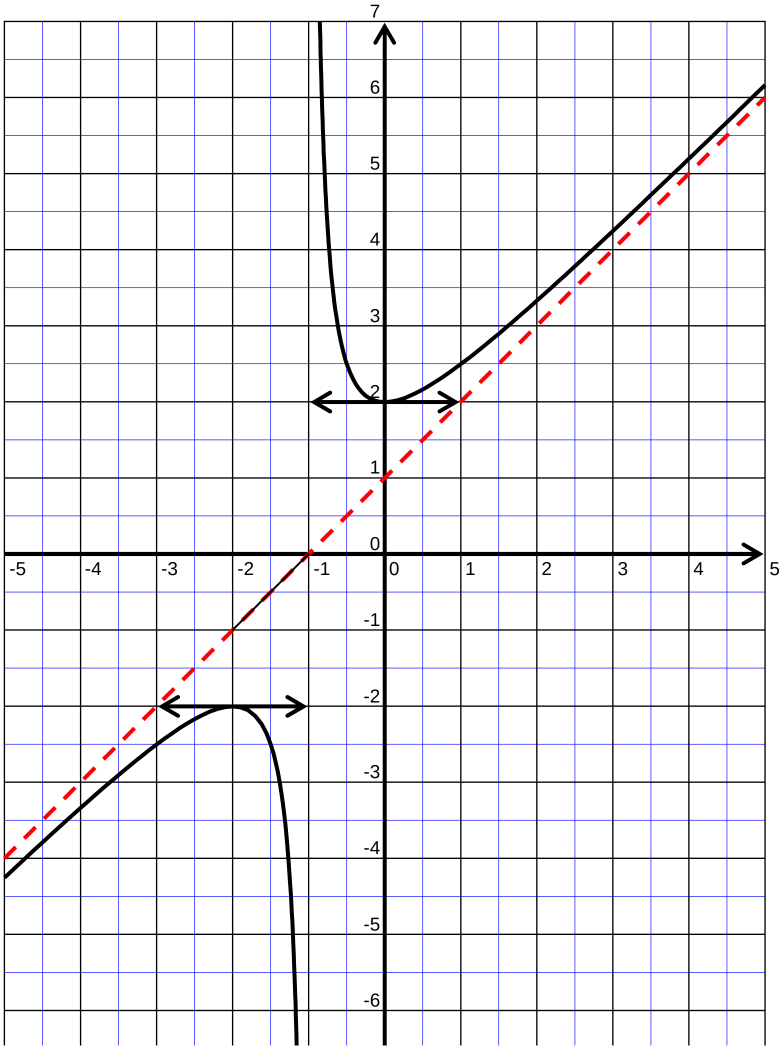
Or la solution de $g(x) = 0$ est α .

On a bien les deux courbes se coupent au point d'abscisse α .

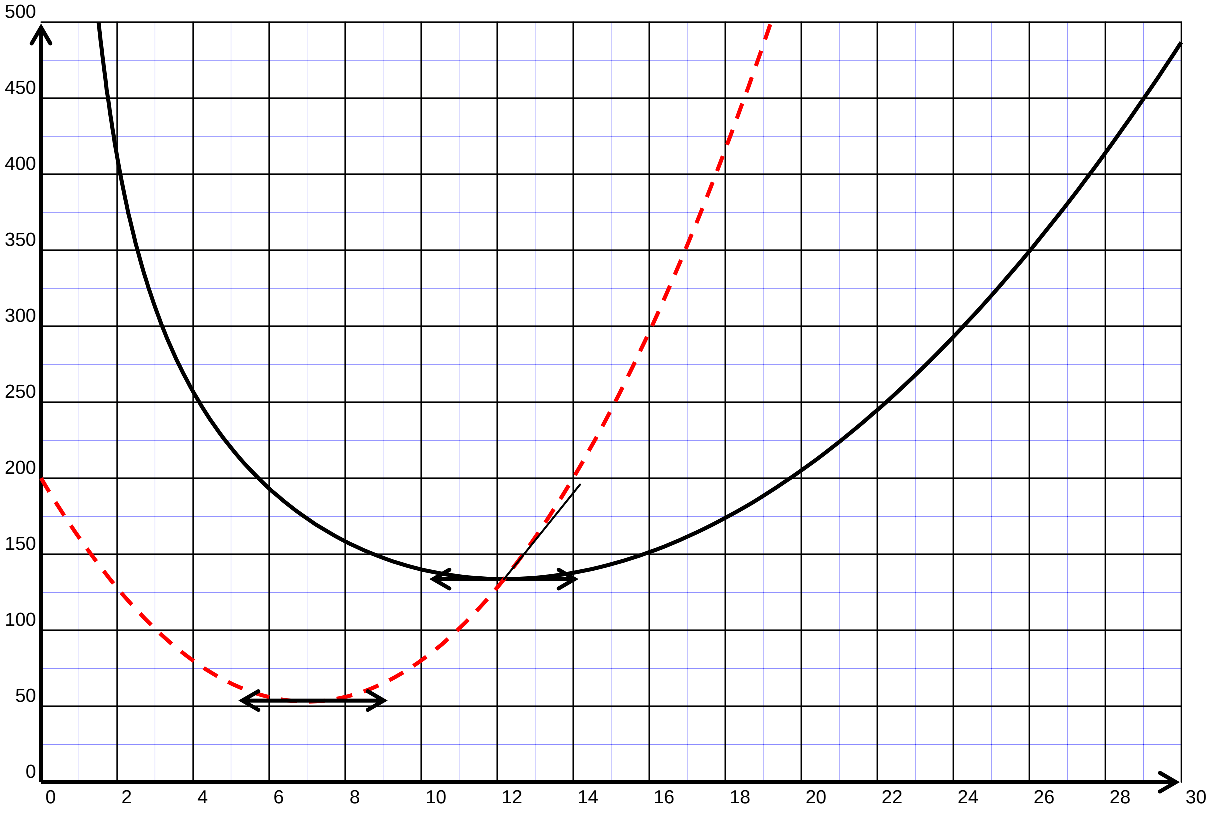
4.
Soit M un point de (C) alors $M\left(x\,;\,x^3 - 21x^2 + 200x + 500\right)$

Coefficient directeur de (OM) = $\dfrac{y_M}{x} = x^2 - 21x + 200 + \dfrac{500}{x} = C_M(x)$

Graphique Ex1



Graphique Ex2



500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30