

Corrigé TES

Sujet Juin 2006 Amérique du Nord

Exercice 1

Q1 : Si $a \in]0;1[$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

En effet, $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$.

Or si $a \in]0;1[$, on a $\ln a < 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln a = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

Q2 : Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \rightarrow xe^{x^2}$ est $x \rightarrow \frac{1}{2}e^{x^2}$

En effet, $xe^{x^2} = \frac{1}{2} \times (2xe^x) = \frac{1}{2} u' e^u \Rightarrow \frac{1}{2} e^u = \frac{1}{2} e^{x^2}$.
primitive

Q3 : La dérivée de la fonction $x \rightarrow x \ln x$ est $x \rightarrow \ln x + 1$

En effet, $x \ln x = u \times v \Rightarrow u'v + uv' = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$.

Dérivée

Q4 : $e^{-2 \ln 5} = \frac{1}{25}$

En effet, $e^{-2 \ln 5} = e^{-\ln 5^2} = e^{\ln \frac{1}{25}} = \frac{1}{25}$.

Q5 : L'équation $e^x = \frac{16}{e^x}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

En effet, $e^x = \frac{16}{e^x} \Leftrightarrow (e^x)^2 = 16 \Leftrightarrow e^{2x} = 16 \Leftrightarrow 2x = \ln 16 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 4^2}{2} \Leftrightarrow x = \ln 4$.

Q6 : L'ensemble des solutions de l'inéquation $x \ln(0,2) - 5 \geq 0$ est $\left] -\infty; \frac{5}{\ln(0,2)} \right]$

$x \ln(0,2) - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \ln(0,2) \geq 5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{\ln(0,2)}$ car $\ln(0,2) < 0$ ($0,2 < 1$)

$$p(A) = 0,4; p(B) = 0,3; p(A \cap B) = 0,2$$

Q7 : $p(A \cup B) = 0,5$.

En effet, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,4 + 0,3 - 0,2 = 0,5$.

Q8 : $p(A \cap \bar{B}) = 0,2$

En effet, B et $\bar{B}$ forment une partition de A.

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ avec les deux événements incompatibles.

Donc $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) \Rightarrow p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B) = 0,4 - 0,2 = 0,2$.

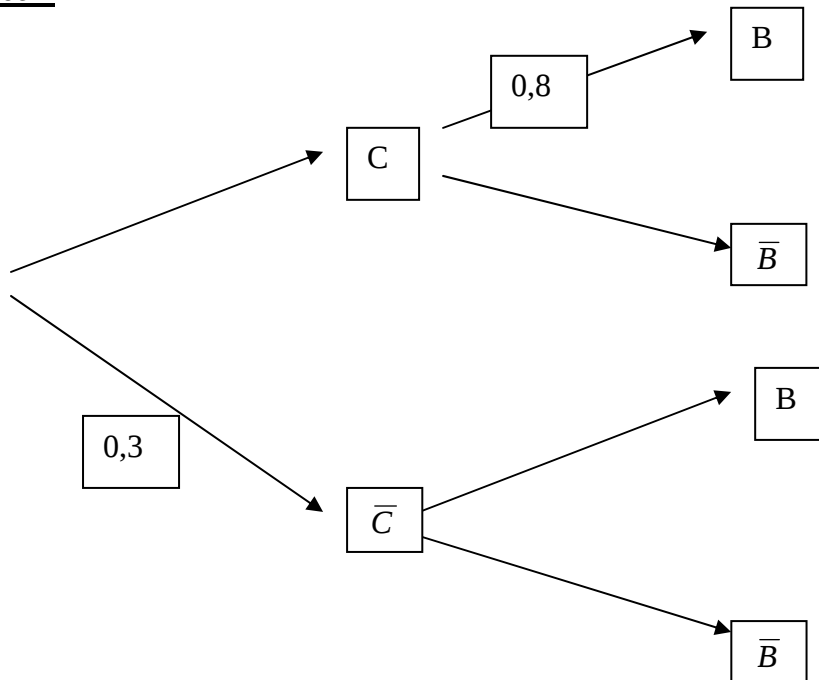
Q9 : $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,8$.

En effet, $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - p(A \cap B) = 1 - 0,2 = 0,8$

Q10 : $p_A(B) = \frac{1}{2}$

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0,2}{0,4} = \frac{1}{2}$$

Exercice 2



1. D'après l'énoncé, $p(\bar{C}) = 0,3$ (probabilité que le touriste visite à pied)
 $p(\bar{C} \cap B) = 0,18$ (probabilité que le touriste visite à pied et boit une boisson)

2. On cherche $p_{\bar{C}}(B) = \frac{p(\bar{C} \cap B)}{p(\bar{C})} = \frac{0,18}{0,3} = 0,6$

$p_{\bar{C}}(B) = 0,6$

3. a. $B = (B \cap C) \cup (B \cap \bar{C})$

Donc $p(B) = p(B \cap C) + p(B \cap \bar{C})$ car $(B \cap C)$ et $(B \cap \bar{C})$ sont incompatibles.

$p(B \cap \bar{C}) = 0,18$

$p(B \cap C) = p(C) \times p_C(B) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$.

D'où $p(B) = 0,18 + 0,56 = 0,74$.

b. Pour 1000 touristes, la recette sera de : $0,74 \times 1000 \times 2 = 1480$.

Pour 1000 touristes, la recette moyenne sera de 1480 €.

4. a. b

Dépense	4 € (visite à pied)	6 € (visite à pied + boisson)	7 € (visite en car)	9 € (visite en car + boisson)
proba	0,12	0,18	0,14	0,56

$p(\bar{C} \cap B) = p(d = 6) = 0,18$ (énoncé)

$p(C \cap B) = p(d = 9) = 0,56$ (déjà calculé)

$p(C \cap \bar{B}) = p(d = 7) = p(C) \times p_C(\bar{B}) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$

$p(d = 4) = 1 - p(d = 6) - p(d = 7) - p(d = 9) = 0,12$.

4.c $E(d) = 0,12 \times 4 + 0,18 \times 6 + 0,14 \times 7 + 0,56 \times 9 = 7,58$.

La dépense moyenne d'un touriste pour cette visite est de 7,58 €.

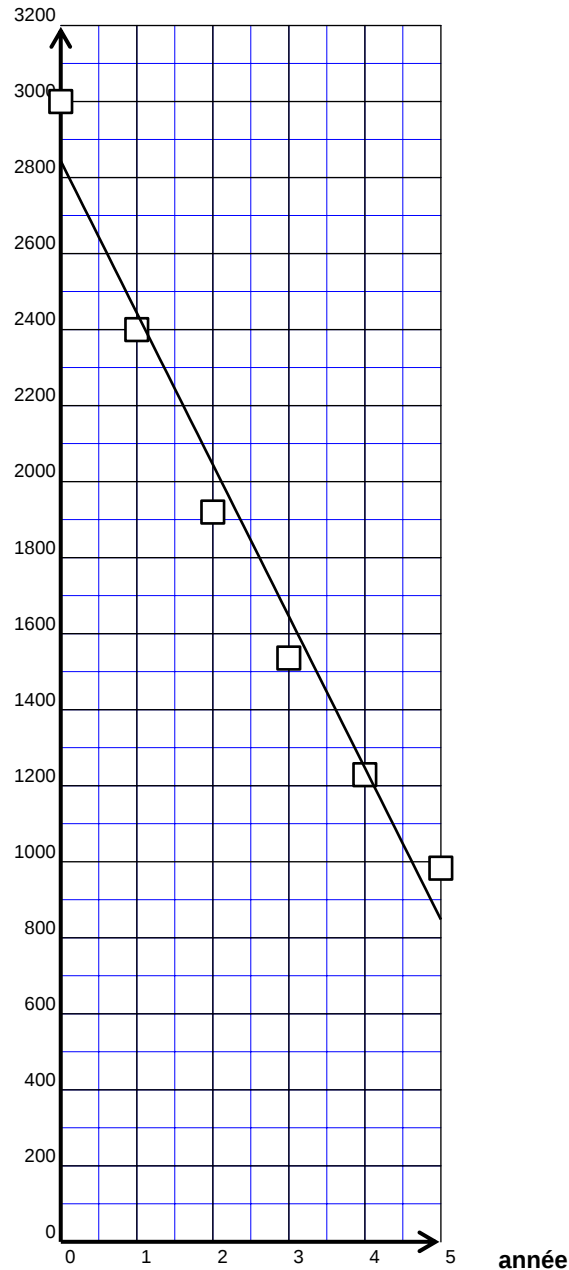
Exercice 3

Partie A (Ajustement affine)

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	3000	2400	1920	1536	1229	983

1.

prix de vente



2. Taux de dépréciation sur les 3 premières années : $\frac{1536 - 3000}{3000} \times 100 = -48,8\%$

Sur les trois premières années, la dépréciation du prix de vente est de 48,8 %.

3. D'après la calculatrice, $a = -399$ et $b = 2843$

Donc la droite d'ajustement affine est la droite d'équation $y = -399x + 2843$.

Partie B

La droite d'ajustement de z en x est : $z = -0,22x + 8,01$.

1.

$$z = -0,22x + 8,01 \Leftrightarrow \ln y = -0,22x + 8,01 \Leftrightarrow y = e^{-0,22x+8,01} \Leftrightarrow y = (e^{-0,22})^x \times e^{8,01} \approx 0,80^x \times 3011$$

Donc l'ajustement exponentiel est $y = 3011 \times (0,80)^x$.

2. On cherche quand le prix de revente est inférieur à 500 €.

On résoud

$$\begin{aligned} 3011 \times 0,80^x &\leq 500 \Leftrightarrow 0,80^x \leq \frac{500}{3011} \\ \Leftrightarrow \ln(0,80^x) &\leq \ln\left(\frac{500}{3011}\right) \\ \Leftrightarrow x \ln(0,80) &\leq \ln\left(\frac{500}{3011}\right) \\ \Leftrightarrow x &\geq \frac{\ln\left(\frac{500}{3011}\right)}{\ln(0,80)} \approx 8,04 \end{aligned}$$

Donc au bout de 9 ans, le prix sera inférieur à 500 €.

Partie C : Comparaison des ajustements.

Au bout de 6 ans,

Ajustement affine : $y = -399 \times 6 + 2843 = 449\text{€}$.

Ajustement exponentiel : $y = 0,80^6 \times 3011 \approx 789\text{€}$

La prix de revente étant en réalité de 780 €, c'est l'ajustement exponentiel qui est le meilleur.

Exercice 4

Soit r définie sur $]0;12]$ par $r(x) = (900x)e^{-0,1(x-2)}$.

A) Etude de f .

1. Soit f définie sur $]0;12]$ par $f(x) = \ln[r(x)]$

$$f(x) = \ln[r(x)] = \ln[(900x)e^{-0,1(x-2)}] = \ln(900x) + \ln(e^{-0,1(x-2)}) \text{ car } 900x \text{ et } e^{-0,1(x-2)} > 0 \text{ sur }]0;12]$$

(Propriété $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ pour a et b positifs)

De même $\ln(900x) = \ln(900) + \ln x$ car $x > 0$ sur $]0;12]$.

$$\text{D'où } f(x) = \ln(900) + \ln x + \ln(e^{-0,1(x-2)}) = \ln(900) + \ln x - 0,1(x-2)$$

$$2. f'(x) = 0 + \frac{1}{x} - 0,1 = \frac{1-0,1x}{x} = \frac{10(1-0,1x)}{10x} = \frac{10-x}{10x}.$$

$$\text{Pour tout } x \text{ de }]0;12], f'(x) = \frac{10-x}{10x}.$$

3. Signe de $f'(x)$:

x	0	10	12
$10-x$	+	0	-
$10x$	+		+
$(10-x)/10x$	+	0	-

Variations de f :

x	0	10	12
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$\ln(9000) \approx 0,8$	$\ln(10800) \approx 1$

$$4. \text{ Pour tout } x \text{ de }]0;12], f(x) = \ln[r(x)] \Rightarrow f'(x) = \frac{r'(x)}{r(x)} \Rightarrow r'(x) = r(x) \times f'(x).$$

Pour tout x de $]0;12]$, $900x > 0$ et $e^{-0,1(x-2)} > 0$ donc par multiplication, $r(x) > 0$.

Donc $r'(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe.

r et f ont les mêmes variations.

5. Donc r est strictement croissante sur $[0;10]$ et décroissante sur $[10;12]$.

6. Le maximum de r est donc atteint pour $x = 10$.

$$r(10) = 9000 \times e^{-0,8} \approx 4044$$

B) Valeur moyenne de r .

1. Soit R définie sur $[0; 12]$ par $R(x) = -9000(x + 10)e^{-0,1(x-2)}$

On pose $u(x) = -9000(x + 10)$ et $v(x) = e^{-0,1(x-2)}$

On a alors : $u'(x) = -9000$ et $v'(x) = -0,1e^{-0,1(x-2)}$

D'où

$$R(x) = u(x) \times v(x) \Rightarrow R'(x) = -9000e^{-0,1(x-2)} + [-9000(x + 10)] [-0,1e^{-0,1(x-2)}]$$

$$R'(x) = 9000e^{-0,1(x-2)} [-1 + (x + 10) \times 0,1]$$

$$R'(x) = 9000e^{-0,1(x-2)} \times (0,1x + 1 - 1)$$

$$R'(x) = 900xe^{-0,1(x-2)} = r(x)$$

Donc R est bien une primitive de r sur $[0; 12]$

2. Valeur moyenne de r sur $[0; 12]$: $r_m = \frac{1}{12} \int_0^{12} r(x) dx$

$$\int_0^{12} r(x) dx = [R(x)]_0^{12} = R(12) - R(0) = -198000e^{-1} - (-90000e^{0,2}) = 90000e^{0,2} - \frac{198000}{e}$$

D'où $r_m = 7500e^{0,2} - \frac{16500}{e} \approx 3090,51$