TES
Corrigé du Sujet national Juin 2006

<u>Exercice 1</u>

0,5 point par bonne réponse et -0,25 par mauvaise réponse.

Affirmation a) : $\boxed{\textbf{FAUX}}$ (il y a trois solutions)

Affirmation b) : $\boxed{\textbf{VRAIE}}$

Affirmation c) : $\boxed{\textbf{FAUX}}$ (si la droite Δ est asymptote oblique, alors la limite est nulle).

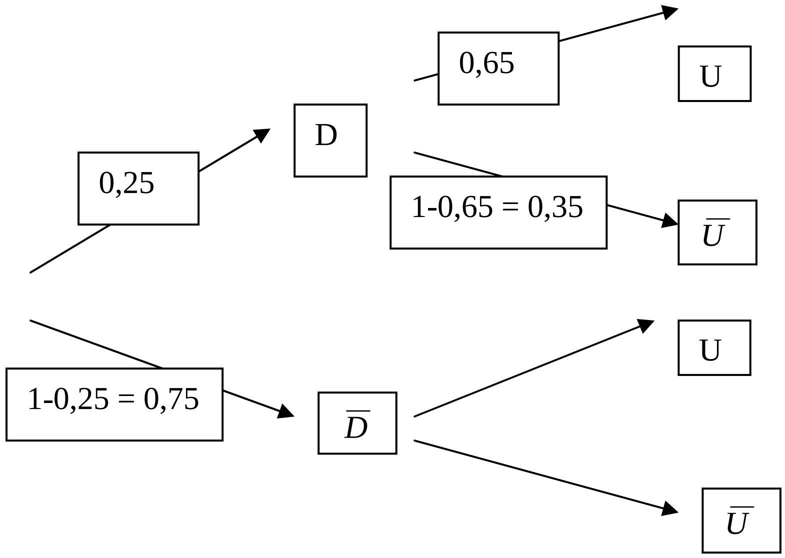
Affirmation d) : $\boxed{\textbf{FAUX}}$ (la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 a un coefficient directeur négatif car la courbe est décroissante en ce point).

Affirmation e) : $\boxed{\textbf{FAUX}}$ (la fonction est croissante puis décroissante sur cet intervalle donc le signe de la dérivée n'est pas constant).

Affirmation f) : $\boxed{\textbf{VRAIE}}$ (l'aire sous la courbe sur $[-1;1]$ est d'environ 11 unités d'aires).

Exercice 2

PARTIE A [3,5 points]



1. a. $\boxed{p_D(U) = 0{,}65}$ (par lecture de l'arbre) **[0,5 point]**

b. $p(\overline{D}) = 1 - p(D) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75 \boxed{\Rightarrow p(\overline{D}) = 0{,}75}$ **[0,5 point]**

2. a. On cherche $p(D \cap U)$.

$p(D \cap U) = p(D) \times p_D(U) = 0{,}25 \times 0{,}65 \boxed{\Rightarrow p(D \cap U) = 0{,}1625}$. **[0,5 point]**

b. On cherche $p(\overline{D} \cap U)$.

$U = (U \cap D) \cup (U \cap \overline{D})$ avec $(U \cap D)$ et $(U \cap \overline{D})$ incompatibles.

Donc $p(U) = p(U \cap D) + p(U \cap \overline{D})$

Or $p(U) = 0{,}7625$ et $p(D \cap U) = 0{,}1625$.

D'où $p(U \cap \overline{D}) = p(U) - p(U \cap D) = 0{,}7625 - 0{,}1625 \boxed{\Rightarrow p(U \cap \overline{D}) = 0{,}6}$ **[1 point]**

3. On cherche $p_{\overline{D}}(U)$.

$$p_{\overline{D}}(U) = \frac{p(\overline{D} \cap U)}{p(\overline{D})} = \frac{0{,}6}{0{,}75} \boxed{\Rightarrow p_{\overline{D}}(U) = 0{,}8}$$ **[1 point]**

PARTIE B [1,5 points]

Il s'agit d'un schéma de Bernouilli répété 3 fois de façon indépendante. En effet, il y a à chaque tirage deux issues possibles : soit le DVD provient d'une dotation (succès), soit il a été acheté (échec). Le nombre de succès parmi les tirages suit donc une loi binomiale de paramètres n = 3 et p = 0,25.

$p(\text{avoir 2 succès parmi les trois tirages}) = 3 \times 0{,}25^2 \times 0{,}75 \approx 0{,}141.$

Nombre de façons de ranger l'échec parmi les trois tirages.

[1,5 points]

Exercice 3

Année	1990	1995	2000	2001	2002	2003
Rang de l'année x_i	0	5	10	11	12	13
Consommation y_i	38	49,1	51,81	57	62,7	68,97

PARTIE A

1. Premier modèle :

a. D'après la calculatrice, $a \approx 2{,}03$ et $b \approx 37{,}31$.

Donc la droite de régression de y en x a pour équation : $\boxed{y = 2{,}03x + 37{,}31}$. **[1 point]**

b. 2008 correspond au rang 18.

Donc $y = 2{,}03 \times 18 + 37{,}31 = 73{,}85$.

Si l'évolution se poursuit suivant ce modèle, la consommation médicale en 2008 sera de l'ordre de 73,85 milliards d'euros.

[1 point]

2. Deuxième modèle :

a. Accroissement relatif de 2000 à 2001 : $\dfrac{57 - 51{,}81}{51{,}81} \approx 0{,}1$ (10%)

Accroissement relatif de 2001 à 2002 : $\dfrac{62{,}7 - 57}{57} = 0{,}1$

L'accroissement relatif annuel est de l'ordre de 10% (cette phrase de conclusion n'est pas demandée). **[1 point]**

b. Nouvelle modélisation : $y = 51{,}81 \times 1{,}1^n$.

2008 correspond à n = 8.

$y = 51{,}81 \times 1{,}1^8 \approx 111{,}059$

Si l'évolution suit ce modèle, la consommation en l'an 2008 sera de 111,059 milliards d'euros **[1 point]**

PARTIE B

On cherche le pourcentage de diminution t

$$83{,}44 \times \left(1 - \frac{t}{100}\right) = 69{,}79 \Rightarrow 1 - \frac{t}{100} = \frac{69{,}79}{83{,}44} \Rightarrow t = 100\left(1 - \frac{69{,}79}{83{,}44}\right)$$

Donc $\boxed{t \approx 16\%}$ **[1 point]**

Exercice 4

Soit f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=e^{x-3}-\dfrac{1}{x+4}$.

Partie A

1. La fonction $x \to e^{x-3}$ est de la forme e^u donc sa dérivée est $u'e^u = e^{x-3}$.

La fonction $x \to \dfrac{1}{x-4}$ est de la forme $\dfrac{1}{u}$ donc sa dérivée est $\dfrac{-u'}{u^2}=\dfrac{-1}{(x+4)^2}$.

D'où $\boxed{f'(x)=e^{x-3}+\dfrac{1}{(x+4)^2}}$ **[0,5 point]**

2. Pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $e^{x-3}>0$ (propriété de la fonction exponentielle) et

$\dfrac{1}{(x+4)^2}>0$ (un carré est toujours positif).

Donc $f'(x)>0$ sur $[0\,;+\infty[$ et $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0\,;+\infty[}$. **[0,5 point]**

3.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-3} = \lim\limits_{X\to+\infty,\, X=x-3} e^{X} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+4=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+4}=0 \end{array}\right\} \text{donc } \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

[1 point]

4. a.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		+	
exp(x−3)−1/(x+4)			$+\infty$
		↗	
	1/e^3-0,25		

$f(0)=e^{-3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{e^3}-\dfrac{1}{4}\approx -0{,}2$

[0,5 point]

b. On admet l'existence de α tel que $f(\alpha)=0$.

f étant strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, on en déduit le signe de $f(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$		–	0	+	

[1 point]

5.a.

x	1,32	1,325	1,33
$f(x)$	-0,0016	-0,0005	0,0006

[0,75 point]

b. Donc $\alpha \approx 1{,}33$ **[0,25 point]**

<u>Partie B</u>

1. Soit g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = e^{x-3} - \ln(x+4)$

a. La fonction $x \to \ln(x+4)$ est de la forme $\ln u$ donc sa dérivée est $\dfrac{u'}{u} = \dfrac{1}{x+4}$.

Donc $g'(x) = e^{x-3} - \dfrac{1}{x+4}$. **[0,5 point]**

b. On a $g'(x) = f(x)$ sur $[0\,;+\infty[$ donc g est une primitive de f sur $[0\,;+\infty[$.

Le signe de f va donc nous donner les variations de g.

g est strictement décroissante sur $[0\,;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha\,;+\infty[$. **[1 point]**

2. $I = \int_0^3 f(x)dx = g(3) - g(0) = (e^0 - \ln 7) - (e^{-3} - \ln 4) = 1 - \ln 7 - \dfrac{1}{e^3} + \ln 4$

$\boxed{I = 1 - \dfrac{1}{e^3} + \ln\left(\dfrac{4}{7}\right) \approx 0{,}39}$ **[1 point]**