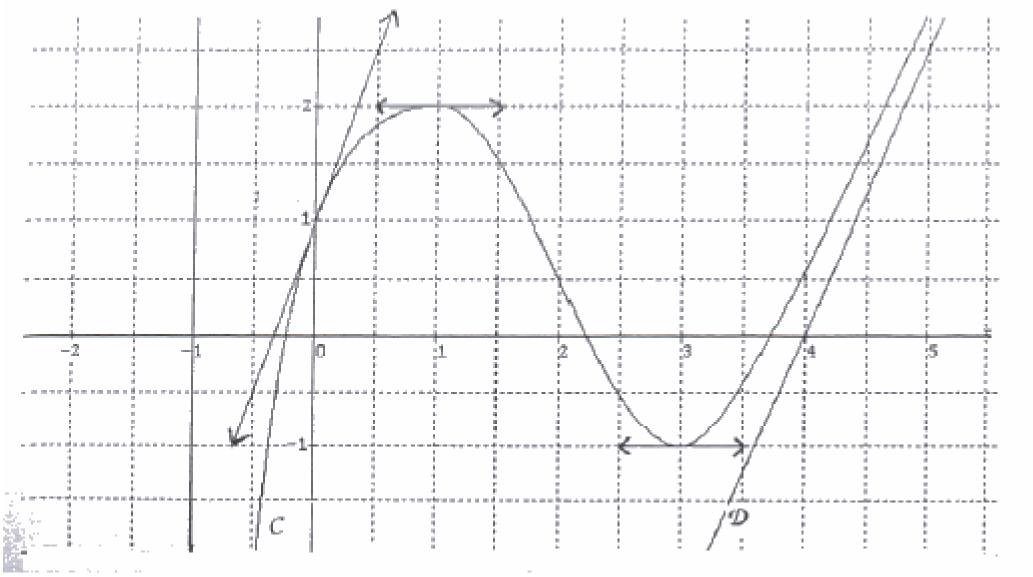
TES Corrigé
Sujet Liban Juin 2006

Exercice 1



I. Etude graphique de *f*.

1. Une asymptote à *C* est la droite d'équation $\boxed{x = -1}$.

En effet, -1 est une valeur interdite pour *f* donc on a une asymptote verticale d'équation *x* = -1.

2. La droite *D* a pour équation : $\boxed{y = \frac{5}{2}x - 10}$.

En effet *D* passe par les points (4 ; 0) et (5 ; 2,5).

$a = \frac{2{,}5 - 0}{5 - 4} = 2{,}5$

$D:\ y = 2{,}5x + b$

(4 ; 0) appartient à *D* donc 0 = $2{,}5 \times 4 + b \Rightarrow b = 0 - 10 = -10$

$D:\ y = \frac{5}{2}x - 10$

3. $\boxed{\text{Le nombre dérivé de } f \text{ en 0 est } 3}$.

En effet, on cherche le coefficient directeur de la tangente à *C* au point d'abscisse 0 soit au point (0 ; 1).
En partant de (0 ; 1), si on avance de 0,5 en abscisse, on monte de 1,5 en ordonnée.
Donc pour une avancée de 1 en abscisse, on monte de 3 en ordonnée.

4. $\boxed{\text{Le nombre de solutions de l'équation } f(x) = 0 \text{ sur }]-1 ; +\infty[\text{ est } 3}$.

En effet, la courbe *C* coupe l'axe des abscisses en trois points.

II. Etude d'une fonction *g*.

On définit sur $]-1;+\infty[$ la fonction $g(x) = \exp(f(x))$.

1.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty \end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0 \end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x\to-1} g(x) = 0$$

2. La fonction exponentielle est strictement croissante sur R donc les fonctions *g* et *f* ont le même sens de variation.

x	-1		1		3		$+\infty$
$g(x)$	‖ 0	↗	e^2	↘	$e^{-1} = \frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

3. La dérivée de la fonction e^u est $u'e^u$.

Donc $g'(x) = f'(x)e^{f(x)}$ sur $]-1;+\infty[$.

Ainsi $g'(1) = f'(1)e^{f(1)} = 0 \times e^2 = 0$.

La tangente à *C* est horizontale au point d'abscisse 1 donc $f'(1) = 0$. Par suite, $\boxed{g'(1) = 0}$.

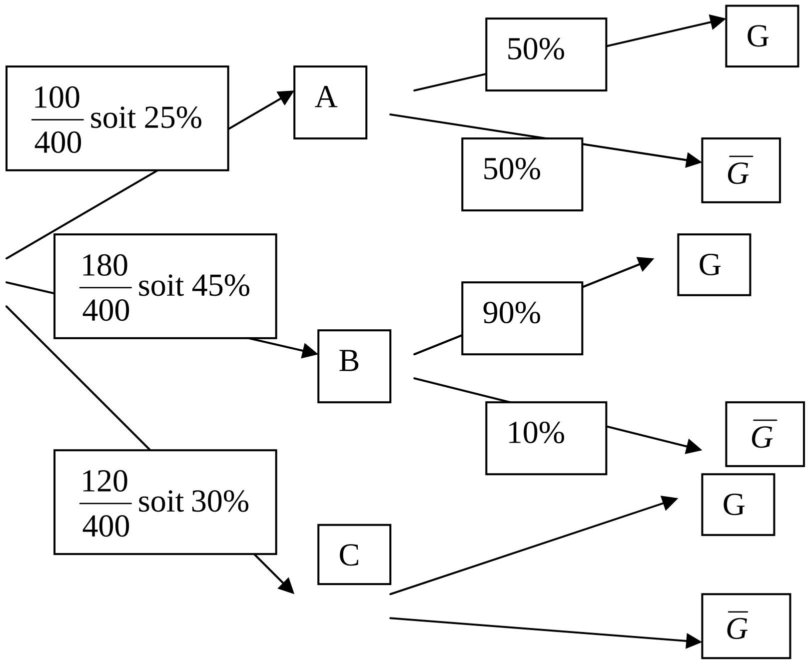
$g'(0) = f'(0)e^{f(0)} = 3e^1$ soit $\boxed{g'(0) = 3e}$.

4. On veut résoudre sur $]-1;+\infty[$ l'inéquation $g(x) \le e^2$.

$g(x) \le e^2 \Leftrightarrow \exp(f(x)) \le e^2 \Leftrightarrow f(x) \le 2$ (Passage au ln).

Par lecture graphique, $\boxed{S =]-\infty;4{,}6]}$.

Exercice 2



1. 50% des anémones germent donc $p_A(G) = 0{,}5$.
90% des bégonias germent donc $p_B(G) = 0{,}9$.
83% des bulbes germent donc $p(G) = 0{,}83$.

2. On cherche $p(A \cap G) = p(A) \times p_A(G) = 0{,}25 \times 0{,}5 = 0{,}125$.
$\boxed{p(A \cap G) = 0{,}125}$

3. On cherche $p(G \cup B) = p(G) + p(B) - p(G \cap B)$.
Or $p(B \cap G) = p(B) \times p_B(G) = 0{,}45 \times 0{,}9 = 0{,}405$
D'où $p(G \cup B) = p(G) + p(B) - p(G \cap B)$ =0,83 + 0,45 – 0,405 = 0,875.
$\boxed{p(G \cup B) = 0{,}875}$.

4. a. On cherche $p_C(G) = \dfrac{p(C \cap G)}{p(C)}$.
$G = (G \cap A) \cup (G \cap B) \cup (G \cap C)$ avec les trois événements incompatibles.
Donc
$p(G) = p(G \cap A) + p(G \cap B) + p(G \cap C) \Rightarrow p(G \cap C) = p(G) - p(G \cap A) - p(G \cap B)$
$p(G \cap C) = 0{,}83 - 0{,}125 - 0{,}405 = 0{,}3$

De suite, $p_C(G) = \dfrac{p(C \cap G)}{p(C)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}3} = 1$.
b. $\boxed{\text{On en déduit que tous les bulbes de Crocus germent}}$.

5. On cherche $p_G(C) = \dfrac{p(C \cap G)}{p(G)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}83} \approx 0{,}361$.

Le bulbe ayant germé, il y a 36,1% de chances que ce soit un crocus.

5. Il s'agit d'un schéma de Bernouilli (2 issues possibles : le bulbe germe ou pas) repété 3 fois de façon indépendante (car il y a un grand nombre de bulbes).

Le nombre de bulbes qui germent suit une loi binomiale de paramètre n = 3 et p= 0,83.

$p(\text{aucun bulbe ne germe}) = (0{,}17)^3$

donc $\boxed{p(\text{au moins un bulbre germe}) = 1-(0{,}17)^3 \approx 0{,}995}$.

Exercice 3

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6	7
Population française en millions	60,05	60,32	60,67	61,04	61,43	61,80	62,18
Taux de pénétration y_i	18,7	34,2	48,9	60,6	62,8	67,5	71,6

(Source : site de l'INSEE)

1. a. Nombre de personnes équipées d'un téléphone mobile en 1999 :

$$\frac{34{,}2}{100} \times 60{,}32 \approx 20{,}63.$$

En 1999, il y avait 20,63 millions de français équipés d'un téléphone portable.

Nombre de personnes équipées d'un téléphone mobile en 2004 : $\frac{71{,}6}{100} \times 62{,}18 \approx 44{,}52$.

En 2004, il y avait 44,52 millions de français équipés d'un téléphone portable.

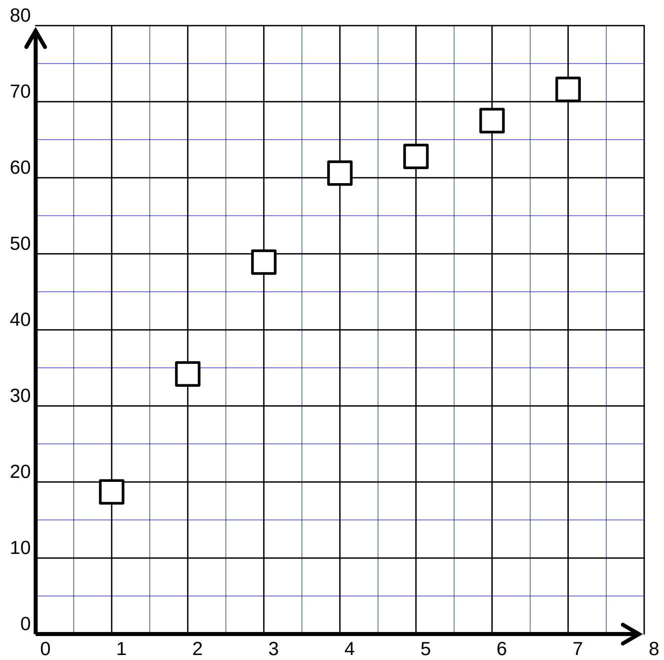
b. Taux de pénétration en 1999 : 34,2.

Taux de pénétration en 2004 : 71,6.

% d'augmentation du taux de pénétration : $\frac{71{,}6 - 34{,}2}{34{,}2} \times 100 \approx 106{,}36$.

Donc le taux de pénétration du téléphone mobile en France a augmenté de 106,36 % de 1999 à 2004.

2.



3. On cherche un ajustement de la forme $y = a \ln x + b$. On pose $z = \ln x$.

a.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	0	0,69	1,10	1,39	1,61	1,79	1,95
Taux de pénétration y_i	18,7	34,2	48,9	60,6	62,8	67,5	71,6

b. Droite d'ajustement :
A l'aide de la calculatrice, a = 28,07 et b = 17,82 à 10^{-2} par défaut.
Donc $y = 28{,}07z + 17{,}82$.
Soit $\boxed{y = 28{,}07 \ln x + 17{,}82}$.

4.a. Estimation du taux de pénétration en 2006 (rang 9) = $28{,}07 \times \ln 9 + 17{,}82 \approx 79{,}5$.
En 2006, 79,5% de la population française sera équipée d'un téléphone portable.

b. On cherche quand le taux de pénétration sera supérieur à 85 %.
On résout

$$28{,}07 \ln(x) + 17{,}82 \geq 85 \Leftrightarrow 28{,}07 \ln x \geq 67{,}18 \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{67{,}18}{28{,}07} \Leftrightarrow x \geq e^{\frac{67{,}18}{28{,}07}} \approx 10{,}94$$

A partir de l'année 2008, le taux de pénétration du téléphone mobile sera supérieur à 85 %.

Exercice 4

Soit f définie sur $[4\,;20]$ par $f(x)=(x-4)e^{-0,25x+5}$

Partie A

1. f est de la forme $u\times v$.

On pose $u(x)=x-4$ et $v(x)=e^{-0,25x+5}$.

$u'(x)=1$ et $v'(x)=-0,25e^{-0,25x+5}$

Alors

$f'(x)=e^{-0,25x+5}+(x-4)(-0,25e^{-0,25x+5})=e^{-0,25x+5}(1-0,25(x-4))=e^{-0,25x+5}(-0,25x+2)$

Pour tout x de $[4\,;20]$, $f'(x)=e^{-0,25x+5}(-0,25x+2)$.

2. Signe de $f'(x)$

x	4		8		20
exp(-0,25x+5)		+	|	+	
-0,25x+2		+	0	−	
f'(x)		+	0	−	

Variations de *f* :

x	4		8		20
f'(x)		+	0	−	
(x-4)exp(-0,25x+5)			$4e^3$		
	0	$\nearrow$		$\searrow$	16

3. a. On veut montrer que la fonction *F* définie sur $[4\,;20]$ par $F(x) = -4xe^{-0,25x+5}$ est une primitive de *f*.

Dérivons *F* : *F* est de la forme $u \times v$.

On pose $u(x) = -4x$ et $v(x) = e^{-0,25x+5}$. On a $u'(x) = -4$ et $v'(x) = -0,25e^{-0,25x+5}$.

$F'(x) = -4e^{-0,25x+5} + (-4x)\left(-0,25e^{-0,25x+5}\right) = e^{-0,25x+5}(-4+x) = f(x)$.

$\boxed{\text{Donc pour tout } x \text{ de } [4\,;20],\ F'(x) = f(x) \text{ donc } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } [4\,;20]}$.

b. $\int_4^{20} f(x)dx = F(20) - F(4) = -80e^0 + 16e^3 = 16e^3 - 80$.

Partie B

Soit *x* le prix de vente d'une centrale en centaines d'euros.

N= $e^{-0,25x+5}$ nombre d'acheteurs d'une centrale.

Prix de revient d'une centrale = 400€ = 4 centaines d'euros.

1. Bénéfice = recette - coût

Recette = *x* N = x$e^{-0,25x+5}$.

Coût = 4 N = 4$e^{-0,25x+5}$

Donc Bénéfice = $xe^{-0,25x+5} - 4e^{-0,25x+5} = e^{-0,25x+5}(x-4)$.

Donc la fonction *f* de la partie A représente bien le bénéfice de l'entreprise.

2. Pour obtenir un bénéfice maximal, l'entreprise doit vendre ses centrales au prix de 800 €, le nombre d'acheteurs sera d'environ 20 et $\boxed{\text{le bénéfice sera de 8034 €}}$.

On trouve ce bénéfice maximal au point le plus haut de la courbe de *f*.

3. Valeur moyenne du bénéfice sur $[4\,;20]$= $\frac{1}{16}\int_4^{20} f(x)dx = e^3 - 5$ (intégrale calculée en A3b)

Pour *x* variant entre 400 et 2000 €, $\boxed{\text{la valeur moyenne du bénéfice est de 1509 €.}}$