

Correction du sujet de Nouméa Décembre 2005
TES

Exercice 1

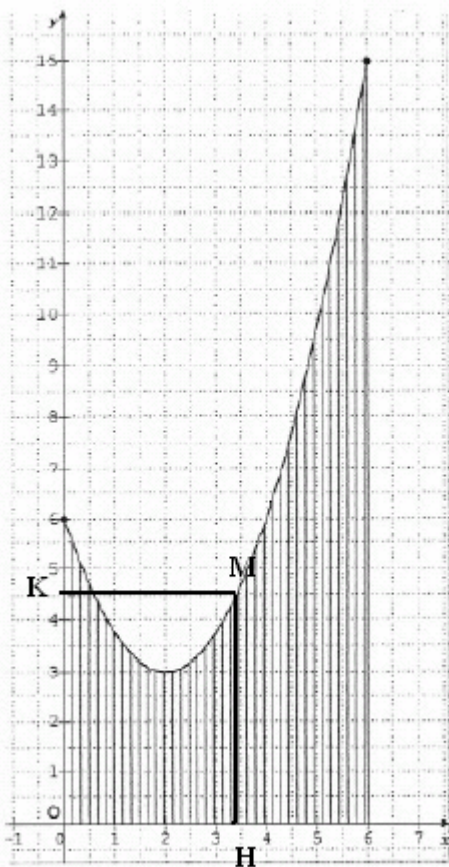
Soit f la fonction définie sur $[0; 6]$ par $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 6$.

1. $S = \int_0^6 f(x) dx$ u.a

$$\int_0^6 f(x) dx = \left[\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x \right]_0^6 = \frac{216}{4} - \frac{3}{2} \times 36 + 36 = 36.$$

On a $\boxed{S = 36 \text{ u.a.}}$

2.



$R(x)$ = aire du rectangle OHMK = $OH \times OK$

$OH = x$ et $OK = f(x)$

Donc, pour tout x de $[0; 6]$, $R(x) = x \times f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 3x^2 + 6x$.

3. On recherche les valeurs pour lesquelles l'aire du rectangle OHMK est égale à l'aire hachurée.

a. On doit résoudre $R(x) = 36 \Leftrightarrow R(x) - 36 = 0 \Leftrightarrow 0,75x^3 - 3x^2 + 6x - 36 = 0$.

On pose $g(x) = 0,75x^3 - 3x^2 + 6x - 36$ sur $[0; 6]$.

$\boxed{\text{Le problème revient à résoudre } g(x) = 0 \text{ sur } [0; 6].}$

b. On étudie les variations de g sur $[0; 6]$:

$$g'(x) = 2,25x^2 - 6x + 6.$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 2,25 \times 6 = -18 < 0.$$

Donc il n'y a aucune racine et $g'(x)$ est du signe de $a = 2,25 > 0$.

x	0	6
$g'(x)$	+	
$g(x)$	-36	54



g est définie, dérivable sur $[0; 6]$ donc continue sur $[0; 6]$.

g est strictement croissante sur $[0; 6]$ et pour tout x de $[0; 6]$, $g(x) \in [-36; 54]$.

$0 \in [-36; 54]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 6]$.

$$g(4) = -12 < 0$$

$$g(5) = 12,75 > 0$$

$$g(4,5) \approx -1,406 < 0$$

$$g(4,6) \approx 1,122 > 0$$

$$g(4,55) \approx -0,1602 < 0$$

$$g(4,56) \approx 0,093 > 0$$

Donc $\alpha \approx 4,56$.

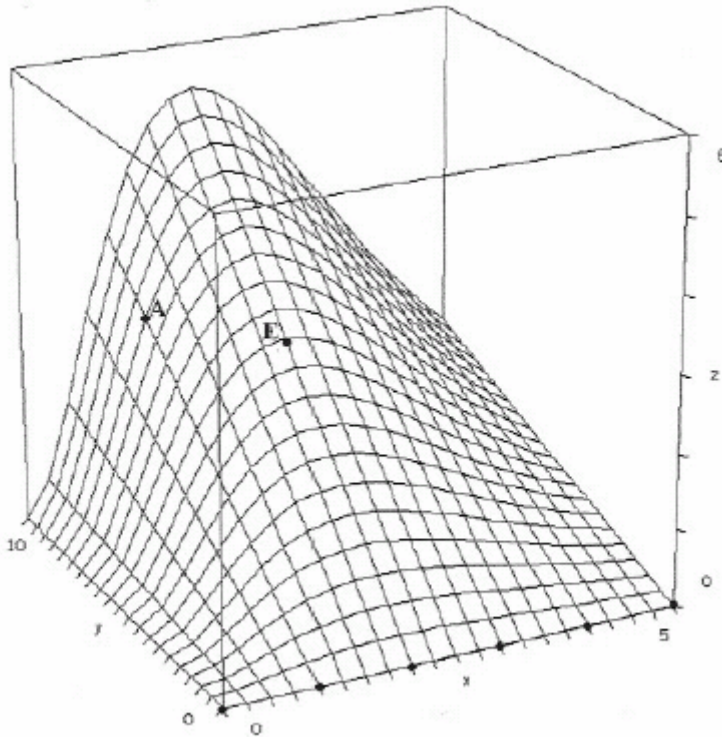
L'aire S est égale à l'aire du rectangle OHMK si M a pour abscisse $x=4,56$.

Exercice 2 (Spécialité)

Le bénéfice B d'une entreprise dépend à la fois des investissements et de la production. On appelle x le montant des investissements en millions d'euros et y la quantité produite en milliers d'unités.

Le bénéfice B , exprimé en millions d'euros, est modélisé par $B(x; y) = x^2 ye^{-x}$.

Ci-dessous une vue de la surface d'équation $z = x^2 ye^{-x}$.



1. Par lecture graphique, le maximum de B semble atteint pour $x = 2$ et $y = 10$.
Pour un bénéfice maximal, il faut 2 millions d'euros d'investissement et 10 000 unités produites.

Le bénéfice est alors d'environ 5,41 millions d'euros.

2.a. $A(1; 8; z_A)$

$$z_A = 8e^{-1} = \frac{8}{e}.$$

b. $E(2; y_E; \frac{8}{e})$

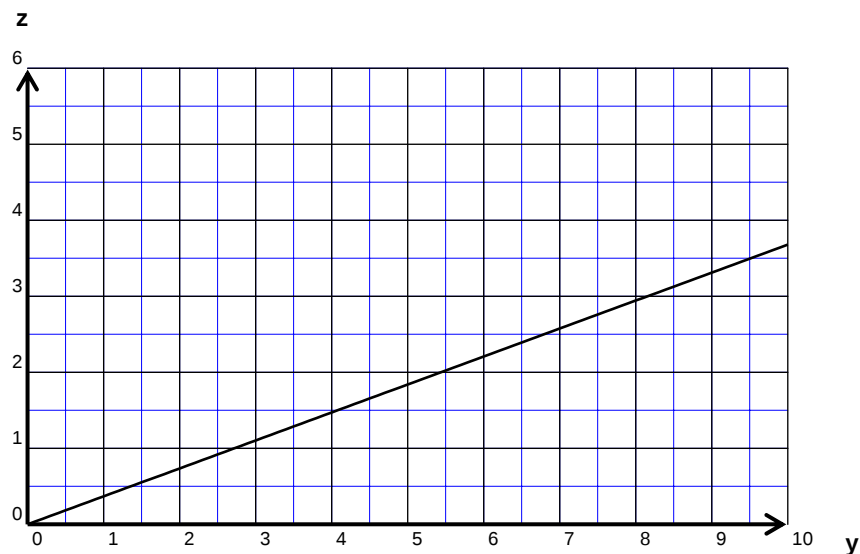
$$\text{Donc } \frac{8}{e} = 4y_E e^{-2} \Rightarrow y_E = \frac{8}{e} \times \frac{1}{4e^{-2}} = \frac{2}{e^{-1}} = 2e.$$

$$\text{Donc } y_E = 2e.$$

2. On cherche l'intersection de (S) avec le plan d'équation $x = 1$.

$$\text{Si } x = 1 \text{ alors : } z = ye^{-1} = \frac{y}{e}.$$

$$\text{Donc l'intersection de (S) avec le plan d'équation } x = 1 \text{ est une droite d'équation } z = \frac{y}{e}.$$



Le bénéfice maximal est atteint pour $y = 10$.

Pour 1 million d'investissement, on a un bénéfice maximal d'environ 3,68 millions d'euros si on produit 10000 unités.

3. Intersection de (S) avec le plan d'équation $y = 10$.

On a alors $z = 10x^2e^{-x}$.

L'intersection de (S) avec le plan d'équation $y = 10$ est la courbe d'équation $z = 10x^2e^{-x}$.

Pour trouver le maximum, on étudie la fonction $f(x) = 10x^2e^{-x}$.

f est de la forme uv .

$$f'(x) = 20xe^{-x} + 10x^2(-e^{-x}) = e^{-x}(20x - 10x^2) = 10xe^{-x}(2 - x).$$

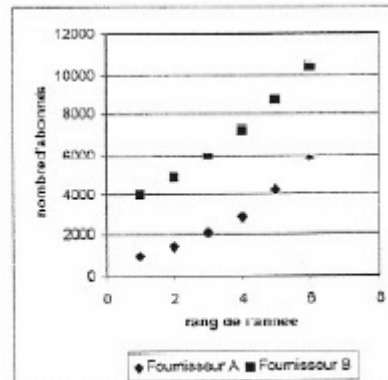
x	0	2	5
$10x$	+		+
$\exp(-x)$	+		+
$2-x$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-

x	0	2	5
$f'(x)$	+	0	-
$10x^2\exp(-x)$	0	5.41	1.68

D'après le tableau de variation de f , le bénéfice est bien maximal pour $x = 2$.

Exercice 2 (Obligatoire)

Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6
Nombre total y_i d'abonnés par le fournisseur A	975	1443	2049	2930	4220	5850
Nombre total t_i d'abonnés par le fournisseur B	4012	4813	5872	7281	8664	10432



1. Pour le fournisseur A,

► entre 1999 et 2004, le nombre d'abonnés a augmenté de $5850 - 975 = 4875$.

► Pour déterminer le pourcentage moyen **annuel**, il faut résoudre :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^5 = 1 + \frac{500}{100} = 6 \Rightarrow 1 + \frac{t}{100} = 6^{\frac{1}{5}} \Rightarrow t = \left(6^{\frac{1}{5}} - 1\right) \times 100 \approx 43.$$

Le pourcentage moyen annuel est donc d'environ 43 %.

Pour le fournisseur B,

► le pourcentage d'augmentation du nombre d'abonnés entre 1999 et 2004 est :

$$\frac{10432 - 4012}{4012} \times 100 \approx 160$$

Entre 1999 et 2004, le nombre d'abonnés a augmenté de 160 %.

► Pour déterminer le pourcentage moyen **annuel**, on résout :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^5 = 1 + \frac{160}{100} = 2,6 \Rightarrow 1 + \frac{t}{100} = 2,6^{\frac{1}{5}} \Rightarrow t = \left(2,6^{\frac{1}{5}} - 1\right) \times 100 \approx 21$$

Le pourcentage moyen annuel est donc d'environ 21 %.

	Augmentation du nombre d'abonnés entre 1999 et 2004	Pourcentage d'augmentation du nombre d'abonnés entre 1999 et 2004	Pourcentage annuel moyen d'augmentation du nombre d'abonnés entre 1999 et 2004
Fournisseur A	4875	500%	43... %
Fournisseur B	6420	160 %	21... %

2. a.

x_i	1	2	3	4	5	6
$Y_i = \ln y_i$	6,882	7,274	7,625	7,983	8,348	8,674

D'après la calculatrice, la droite d'ajustement de Y en x par la méthode des moindres carrés est :

$$Y = 0,358x + 6,544.$$

b. Le rang de l'année 2006 est 8.

$$Y \approx 9,408 \Rightarrow \ln y \approx 9,408 \Rightarrow y = e^{9,408} \approx 12185.$$

Le nombre d'abonnés au fournisseur A, d'après cet ajustement, serait de 12185 en 2006.

3. Pour la série $(x_i ; t_i)$, on a posé $T_i = \ln(t_i)$ et obtenu, par la méthode des moindres carrés, la droite d'ajustement Δ d'équation $T = 0,193x + 8,102$.

Pour 2006, le rang est 8 :

$$T \approx 9,646 \Rightarrow \ln t \approx 9,646 \Rightarrow t \approx e^{9,646} \approx 15460$$

Le nombre d'abonnés au fournisseur B, d'après cet ajustement, serait de 15460 en 2006.

4. Pour le fournisseur A, l'ajustement exponentiel a pour équation $y = e^{0,358x+6,544}$.

Pour le fournisseur B, l'ajustement exponentiel a pour équation $y = e^{0,193x+8,102}$.

Le nombre d'abonnés du fournisseur A dépassera le nombre d'abonnés du fournisseur B quand :

$$\begin{aligned} e^{0,358x+6,544} &> e^{0,193x+8,102} \Leftrightarrow 0,358x + 6,544 > 0,193x + 8,102 \\ &\Leftrightarrow 0,165x > 1,558 \\ &\Leftrightarrow x > \frac{1,558}{0,165} \approx 9,44 \end{aligned}$$

On cherche l'année de rang 10 donc 2008.

Le fournisseur A aura un plus grand nombre d'abonnés que le fournisseur B à partir de l'année 2008.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \ln(2x - 4)$.

1. a.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 4 = +\infty$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$$

$$\text{donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2, x > 2} 2x - 4 = 0^+$$

$$\lim_{X \rightarrow 0^+} \ln X = -\infty$$

$$\text{donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow 2, x > 2} f(x) = -\infty}$$

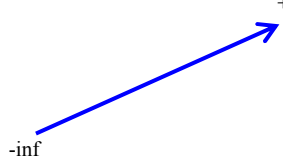
On en déduit que la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

b. f est de la forme $\ln u$ donc f' est de la forme $\frac{u'}{u}$.

$$\text{Pour tout } x \text{ de }]2; +\infty[, f'(x) = \frac{2}{2x-4} = \frac{1}{x-2}.$$

Sur $]2; +\infty[, f'(x) > 0$ car $x - 2 > 0$

donc f est strictement croissante sur $]2; +\infty[$.

x	2	$+\infty$
$f(x)$	+	
$\ln(2x-4)$		

c. On cherche le point d'intersection avec l'axe des abscisses donc on résout $f(x) = 0$.

$$\ln(2x - 4) = 0$$

Condition d'existence : $x \in]2; +\infty[$.

$$\ln(2x - 4) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = e^0 = 1 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = 2,5.$$

Le point A intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $(2,5; 0)$.

d. Equation de la tangente en A :

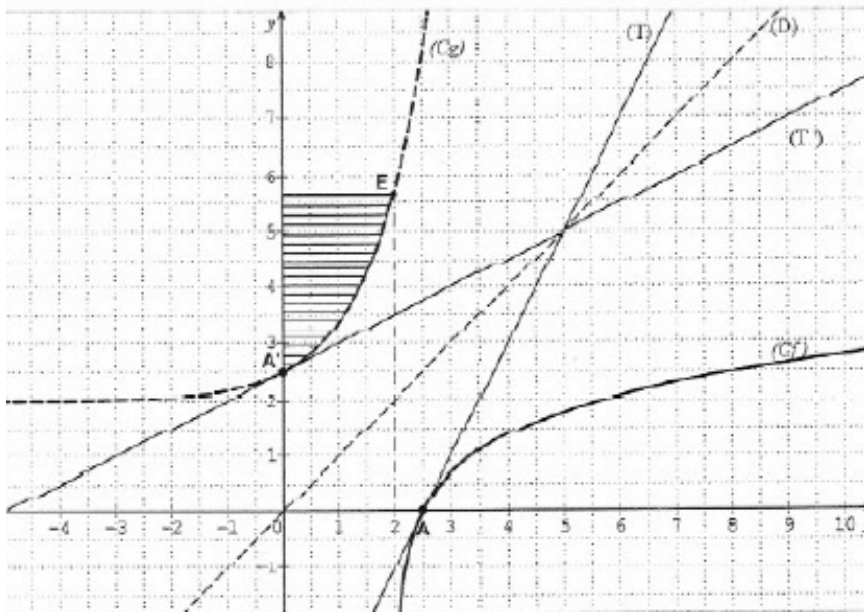
$$f'(2,5) = \frac{1}{0,5} = 2$$

$$f(2) = \ln(1) = 0.$$

$$(T) : y = 2(x - 2,5)$$

$$\boxed{(T) : y = 2x - 5}$$

2.



a. Par lecture graphique, (T') a pour coefficient directeur 0,5 (quand on avance d'une unité horizontalement, on monte de 0,5 verticalement).

b. $g(x) = a + be^x$

$$g(0) = 2,5 \Rightarrow a + be^0 = 2,5 \Rightarrow a + b = 2,5$$

$$g'(x) = be^x ; g'(0) = 0,5 \Rightarrow be^0 = 0,5 \Rightarrow b = 0,5$$

Donc $a = 2$.

D'où $\boxed{g(x) = 2 + \frac{1}{2}e^x}$.

c. Ordonnée de E d'abscisse 2 : $y_E = g(2) = 2 + \frac{1}{2}e^2$.

d. La droite (D) a pour équation $y = x$. Par symétrie par rapport à (D), on inverse donc les coordonnées.

E' image de E par symétrie par rapport à la droite (D) a pour coordonnées $\left(2 + \frac{1}{2}e^2 ; 2\right)$.

3. a. $\int_0^2 \left(2 + \frac{1}{2}e^x\right) dx = \left[2x + \frac{1}{2}e^x\right]_0^2 = \left(4 + \frac{1}{2}e^2\right) - \left(0 + \frac{1}{2}e^0\right) = 4 + \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}$.

b. L'intégrale calculée précédemment donne l'aire entre l'axe des abscisses et la courbe sur $[0 ; 2]$: ce n'est pas l'aire cherchée !!

Donc l'aire cherchée = Aire du rectangle de largeur 2 et de longueur $\left(2 + \frac{1}{2}e^2\right)$ - Aire sous la courbe.

$$A = 2 \times \left(2 + \frac{1}{2}e^2\right) - \left(4 + \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2} \text{ soit } \boxed{A = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2} \text{ u.a}}$$

c. Les points d'abscisses $\frac{5}{2}$ et $2 + \frac{1}{2}e^2$ de la courbe Cf sont les points A et E', images respectives de A' et E sur la courbe Cg . Donc la portion de plan dont on cherche l'aire est l'image par la symétrie d'axe (D) de la portion dont on vient de calculer l'aire. La symétrie axiale conserve l'aire donc :

$$\int_{\frac{5}{2}}^{2+\frac{1}{2}e^2} f(x)dx = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2} \text{ u.a}$$