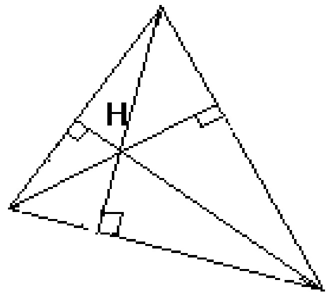
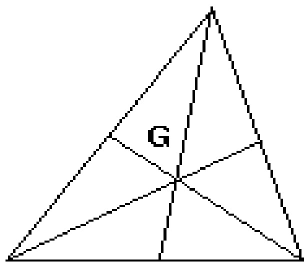
THEOREMES DE GEOMETRIE

DROITES REMARQUABLES D'UN TRIANGLE

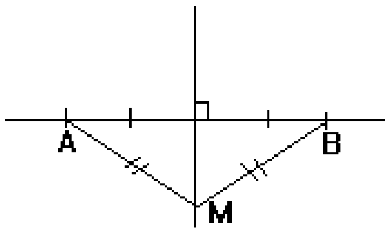
Hauteurs : On appelle hauteur d'un triangle une droite qui passe par un sommet du triangle et qui est perpendiculaire au coté opposé à ce sommet.
Le point de concours des hauteurs est appelé ***orthocentre*** (il est généralement noté H).



Médianes : On appelle médiane d'un triangle une droite qui passe par un sommet du triangle et le milieu du côté opposé à ce sommet.
Le point de concours des médianes est appelé ***centre de gravité*** (il est généralement noté G).
G est situé sur chaque médiane au $\frac{2}{3}$ du sommet.

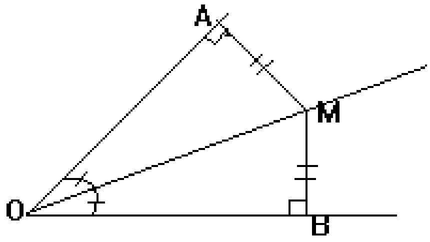


Médiatrices : On appelle médiatrice d'un segment [AB] la droite perpendiculaire à [AB] en son milieu.
<u>Propriété caractéristique de la médiatrice</u> : Si un point appartient à la médiatrice d'un segment alors il est équidistant (à égale distance) des extrémités de ce segment.
<u>Réciproque</u> : Si un point est équidistant des extrémités d'un segment alors il appartient à la médiatrice de ce segment.



Les médiatrices des trois côtés d'un triangle sont concourantes en un point appelé ***centre du cercle circonscrit au triangle*** (il est généralement noté O).

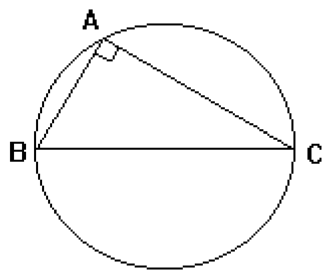
Bissectrices : On appelle bissectrice d'un angle l'axe de symétrie de cet angle. La bissectrice est donc la droite qui divise un angle en deux angles égaux.
Propriété caractéristique de la bissectrice : Si un point est sur la bissectrice d'un angle alors il est équidistant des côtés de cet angle.
Réciproque : Si un point est équidistant des côtés d'un angle alors il est sur la bissectrice de cet angle.



LE TRIANGLE RECTANGLE

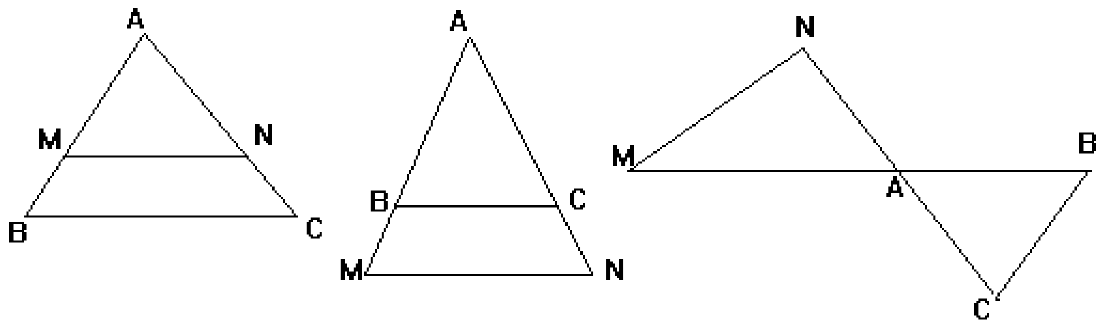
Théorème de Pythagore : Si un triangle est rectangle alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
Réciproque : Si dans un triangle ABC on a $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors ABC est un triangle rectangle en A.

Théorème du cercle circonscrit à un triangle rectangle : Si un triangle est rectangle alors il est inscrit dans un cercle de diamètre son hypoténuse.
Réciproque : Si un triangle ABC est inscrit dans un cercle de diamètre [BC] alors il est rectangle en A.



THALES

Théorème de Thalès : Si dans un triangle ABC, M est un point de la droite (AB), N un point de la droite (AC) et si (MN) est parallèle à (BC) alors : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

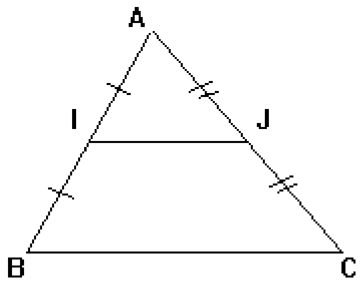


Réciproque : Si dans un triangle ABC, deux points M et N occupent des positions analogues respectivement sur (AB) et (AC) tels que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors (MN) est parallèle à (BC).

THEOREME DE LA DROITE DES MILIEUX

Théorème de la droite des milieux : Si, dans un triangle ABC, I est milieu de [AB] et J milieu de [AC] alors (IJ) est parallèle à (BC) et IJ = $\frac{1}{2}$ BC.

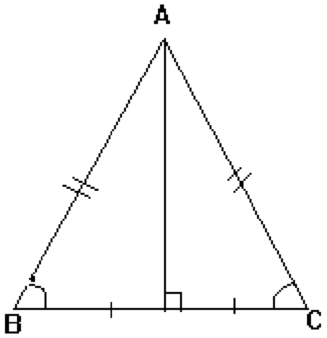
Réciproque : Si, dans un triangle, une droite parallèle à l'un des côtés passe par le milieu d'un deuxième côté alors cette droite coupe le troisième côté en son milieu.



TRIANGLES PARTICULIERS

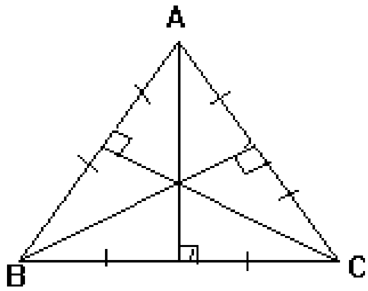
Triangle isocèle : Dire qu'un triangle ABC est isocèle en A signifie que AB = AC.
Il en résulte que :

- ▹ deux angles (les angles à la base) ont même mesure : $\hat{B} = \hat{C}$.
- ▹ A est sur la médiatrice de [BC].
- ▹ la médiane issue de A est aussi hauteur du triangle, bissectrice de l'angle $\hat{A}$.



Triangle équilatéral : Dire qu'un triangle ABC est équilatéral signifie que AB = AC = BC.
Il en résulte que :

- ▹ les trois angles ont même mesure : 60°.
- ▹ chaque sommet est sur la médiatrice du côté opposé.
- ▹ chaque médiane est aussi hauteur du triangle et bissectrice.

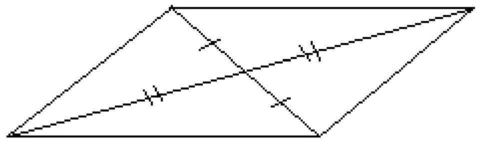


Pour démontrer qu'un triangle est isocèle ou équilatéral, il suffit de démontrer l'une des propriétés énoncées ci-dessus.

PARALLELOGRAMMES, RECTANGLES, LOSANGES, CARRES

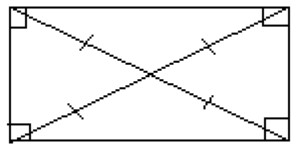
Parallélogramme : Un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles deux à deux.
Autres propriétés :

- ▹ ses diagonales se coupent en leur milieu.
- ▹ ses côtés opposés sont deux à deux égaux.



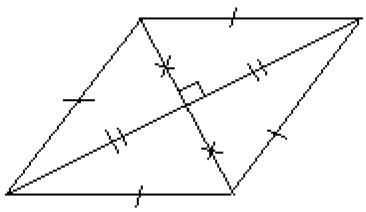
Rectangle : Un rectangle est un quadrilatère ayant trois angles droits.
Ou encore :

- ▹ c'est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu et ont même longueur.
- ▹ c'est un parallélogramme ayant un angle droit.
- ▹ c'est un parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur.



Losange : C'est un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires en leur milieu.
Ou encore :

- ▹ c'est un parallélogramme dont tous les côtés sont égaux.
- ▹ c'est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires.

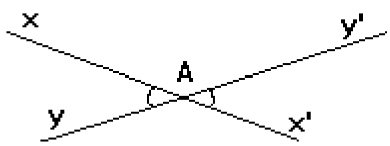


Carré : C'est un quadrilatère qui est à la fois losange et rectangle.

Pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, un rectangle, un losange ou un carré, il suffit de démontrer l'une des propriétés énoncées ci-dessus.

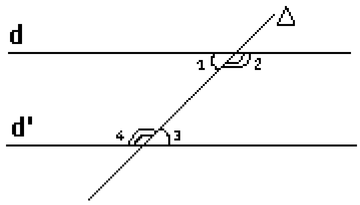
AVEC LES ANGLES

Angles égaux :



Les droites (x x') et (y y') sont deux droites sécantes en A. Les angles $x\hat{A}y$ et $x'\hat{A}y'$ sont dits **opposés par le sommet.**

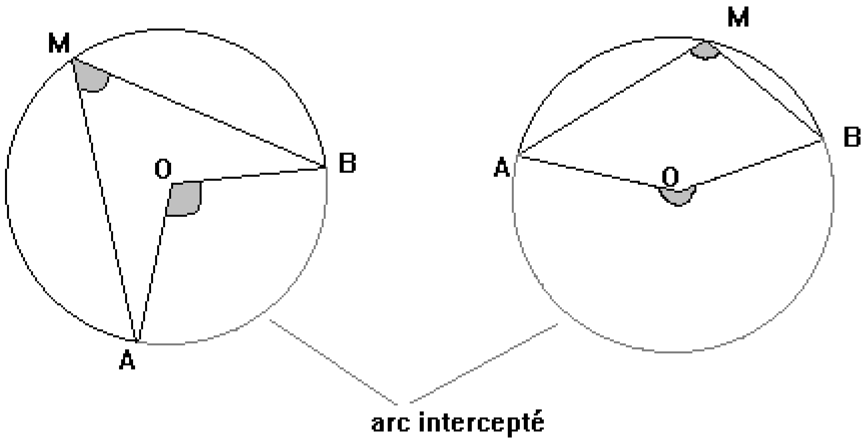
On a alors $x\hat{A}y = x'\hat{A}y'$.



d et d' sont deux droites parallèles coupées par une sécante Δ. Dans ces conditions, les angles $\hat{1}$ et $\hat{3}$ sont dits **alternes internes**. Ils sont **égaux**.

Les angles $\hat{2}$ et $\hat{4}$ indiqués sur la figure sont aussi des angles **alternes internes**. Ils sont donc **égaux**.

Théorème de l'angle inscrit : Dans un cercle, un angle inscrit est égal à la **moitié** de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

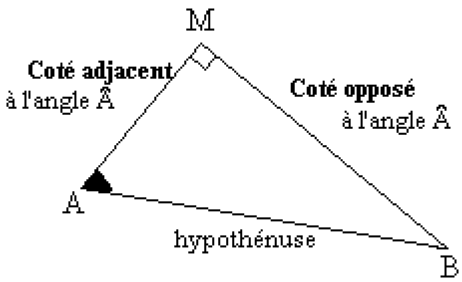


Conséquences :

1) Dans un cercle, deux angles inscrits qui interceptent le même arc sont égaux.

2) Lorsque [AB] est un diamètre du cercle, le triangle AMB est rectangle en M (revoilà un thèorème connu !)

Trigonométrie :



Dans un triangle ABM rectangle en M,

$$\sin \hat{A} = \frac{MB}{AB} = \frac{\textit{côté}\ \text{opposé}}{\text{hypothénuse}}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{MA}{AB} = \frac{\text{cot}\,\textit{é}\ \text{adjacent}}{\text{hypothénuse}}$$

$$\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$$

<u>Propriétés</u> : $0 < \sin \hat{A} < 1$ et $0 < \cos \hat{A} < 1$.

$\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1$.